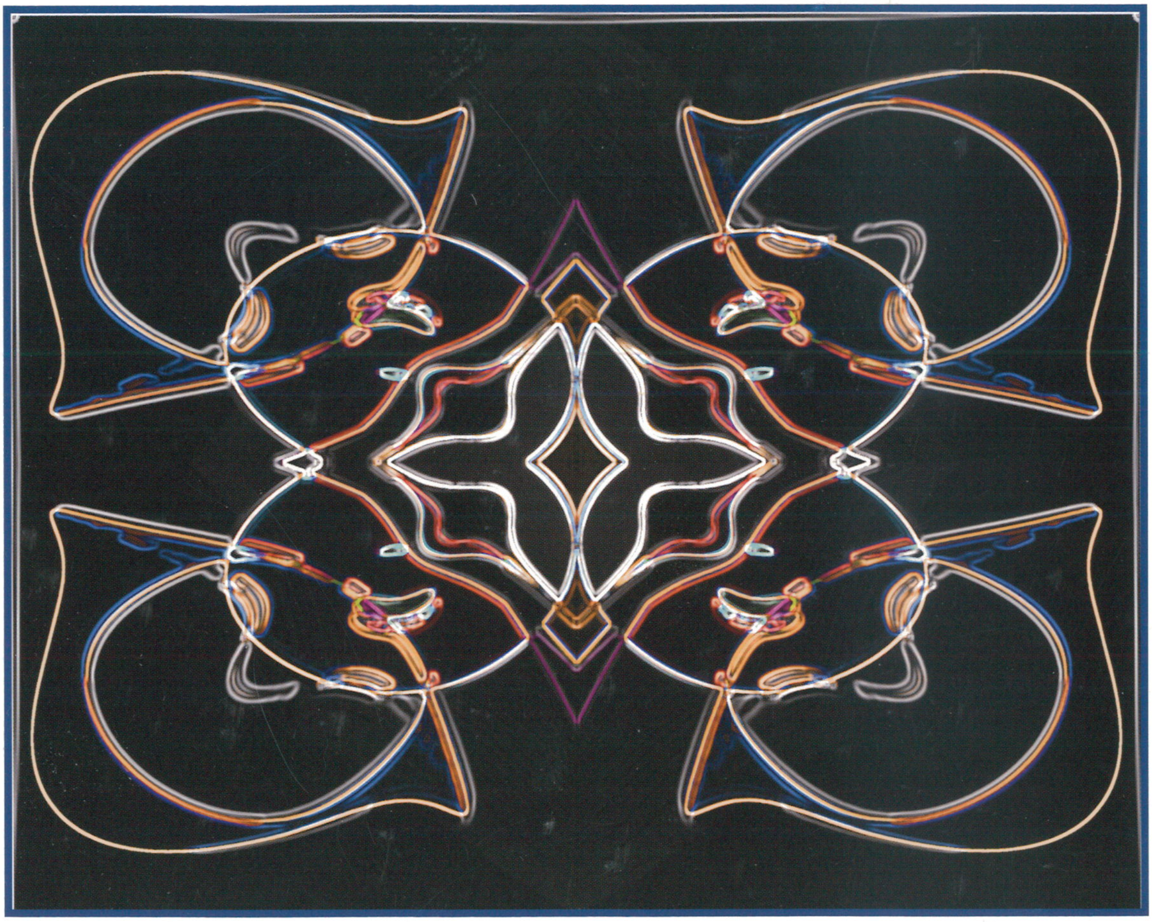
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2014年9月1日発行　第52巻9号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

9
2014

特集　重力の謎と魅力
身近で謎の多い存在



No.615

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 615 September 2014

重力の謎と魅力

身近で謎の多い存在

表紙：戸川 隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間(本誌のみ) 11,000 円，半年間(本誌のみ) 5,500 円. (税込み価格)

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2011 年/6 省略
2011 年/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12 〈振動する〉物理
2013 年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯
/12 物理学における存在とは
2014 年/1 波と粒子
/2 利用する物理
/3 幾何学における様々な発想
/4 物理現象における表現の多様さ
/5 数理科学における代数的構造
/6 数学と物理における空間概念
/7 モノポールの謎
/8 ベクトル解析の力

数理科学臨時別冊一覧

13 年/9 統計力学から理解する 超伝導理論
13 年/12 量子力学ノート
14 年/1 量子情報と時空の物理
14 年/2 弦理論と行列模型
14 年/3 ディラック方程式
14 年/4 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント
14 年/5 パーコレーション理論講義
14 年/6 格子模型の数理物理
14 年/7 数物系のためのミラー対称性入門
14 年/8 情報幾何学の新展開

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
三省堂本店(神田)
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂(高田馬場)
MARUZEN &ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
丸善日本橋店
MARUZEN 多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店(横浜)
有隣堂イセザキ町本店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN &ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN 広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学 (北１店)
九州大学 (理系)

September 2014 MATHEMATICAL SCIENCES Number 615

特集／重力の謎と魅力

巻頭言

白水 徹也

1. はじめに

まずは佐藤勝彦氏のコラムを是非ご覧いただきたい.

Newton の万有引力による重力の記述が Einstein の一般相対論にとって変わって宇宙の理解は前世紀後半から観測の進展と歩調を合わせて大きく進展した．一般相対論を基礎とした宇宙の進化の理解はこの 20 年ほどでほぼ確認されている．1997 年のクリスマスに佐藤氏率いる東京大学ビッグバンセンター主催の研究会「宇宙パラメーターと宇宙の進化」開催の時点では，宇宙論の様々な問題を抱えつつもうじき宇宙模型の詳細も決まるであろう期待は誰しもがもっていた．そして，次の年から劇的な変化が訪れることを誰が想像できたであろう．

宇宙背景輻射の揺らぎ，大規模構造は重力不安定説で理解できている．大きなスケールでは線形近似が有効であるため，正確な理論的予言ができるのである．揺らぎの初期条件に対する観測からの制限は，宇宙誕生間もない頃に起きたとされる加速的な膨張（インフレーション宇宙）によって見事に説明できる（向山信治氏の記事参照）．宇宙論の輝かしい成果である．

しかし，問題も生じている．誕生後間もない頃のインフレーション宇宙に対しては，高エネルギー物理が何らかの形で寄与していると考えられている．一方，1998 年に発見された現在の加速膨張の起源，性質について諸説あり，現在も議論が進められている．現在のことであるから，高エネルギー物理は関係のないことのように思える．大雑把には宇宙定数と呼ばれるもので説明がつくことになっているが，今後の観測の結果次第では定数ではなく何らかの非自明な機構，あるいは何かしらの場の導入が真剣に求められるかもしれない．Einstein 方程式自体の修正が求められる可能性もある（向山氏の記事参照）．このように今世紀に入ってから一般相対論を危ぶむ研究者も出てきたが，一般相対論と素粒子物理の延長上にある超弦理論を除いて一般相対論以上に美しい重力理論が現在までに登場したかは疑問である．しかし，科学者として追求することは正しい姿であろう．

2. 美女と野獣

一般相対論において重力は Riemann 幾何学で美しく記述されている．こんなに美しい理論が存在するのかと一般相対論を勉強したことがある読者は一度は思ったことであろう（佐藤氏のコラム参照）．基本変数は時空の計量と呼ばれる微小区間の距離を決める量である．この計量は時間と空

間に依存する．時空の湾曲を計る幾何学量は Riemann テンソルである．時空を決める方程式に導出に Einstein は苦心したようであるが, 測地線, 潮汐力, 物質の保存則の考察から導かれる（前田恵一氏の記事参照）．幾何学との相性もよく，Einstein 方程式を直接解くことなく，古典的に自然な仮定の下で宇宙の特異点定理が一般的に発生することが Hawking らによって示されている．このあたりの記述は石橋明浩氏の記事を参照されたい．本格的でハードコアな相対論を楽しむことができるであろう．

ところで, 一般相対論には特筆すべき性質がある．それは正エネルギー定理が成り立っていることである．時空の全エネルギーが定義できるような時空において，それが非負であり，ゼロであるときに限り平坦な時空になることが 1981 年に Schoen–Yau と Witten によって独立に示されている．通常理論を構築する際，安定性を気に掛ける．正エネルギー定理はエネルギーに底があることを示している．これは一般相対論が非線形レベルで安定な理論であることを保証している．修正重力理論においても同様の性質が保証されていなければ，それらを考える理論的根拠は幾分薄れる．しかし，長年懸案であった質量をもつ重力理論が 2011 年に構成されたことは注目に値する．この理論ならびにその拡張された理論の宇宙論などへの応用が現在活発に行われている（前田氏，向山氏の記事参照）．そして，最近この類の理論の中で正エネルギー定理が成立する優良理論の選別に関する研究がようやく始まっている．

様々な観点で一般相対論は美しい．しかし，一般相対論にも問題がないわけではない．例えば，特異点定理は特異点において一般相対論が破綻することを示唆する．特異点定理（石橋氏の記事参照）の予言する特異点において必ずしも高エネルギー領域の範疇になるか否か自明でないが，一般には量子論的な扱いが要求されると考えられている．これを動機に量子重力や量子宇宙論の議論が展開されるが，土台自体が未完成のままである．量子もつれ（entanglement）が鍵を握っているのではないかという細谷暁夫氏の独自のスケッチは興味深い．素粒子論，量子宇宙論，そして量子情報へと研究をシフトさせていった細谷氏ならではの記事であろう．偶然か必然か量子もつれは高柳匡氏の記事でもその重要性が説かれている．

また，確立された理論の一つである場の理論からは真空のエネルギーの存在が予言される．真空のエネルギーは宇宙定数の役割を果たし，宇宙の加速膨張を引きおこす．しかし，それは観測値のものよりも 120 桁と大きい．なぜ，これほど小さな値をとるのか．そもそも真空のエネルギーは本当に重力の源になるのか（九後汰一郎氏の記事参照）．宇宙に適用すると途端に不具合が生じる．

ミクロスケールでの量子化問題にせよマクロスケールでの加速膨張問題にせよ重力には謎がある．この謎が新しい物理法則の生みの陣痛を誘発し，一般相対論を超える美しく魅力的な理論の登場につながることを期待したい．その場合，一般相対論の土台となった Riemann 幾何学のように新しい数学*1) が必要となるかもしれない．たとえ一般相対論がさらに上層クラスの理論にとって代わったとしても，新しい数学を用いることで同様に豊かな理解が得られることを祈らずにはいられない．近似的に一般相対論を内包しているはずであるから，何らかの形で新しい理論と結ばれるのかもしれない．またそれは超弦理論との相性もよいと期待したい．野獣が王子になる日がくるのであろうか．美女と野獣の運命は如何に！

3. 展開する重力の役割

天体形成・現象において重力が重要な役割を果たしていることは言うまでもないであろう．天体現象は宇宙スケールと比べると多様な物理過程も効いてくるため，多彩な現象が期待され，観測に対して豊かな洞察を与えてくれている．少し難しい箇所もあると思うが，井岡邦仁氏の解説を楽しんでほしい．

*1) 数学者にとっては既存のものでも構わない．

そしていま新しい時代に向かいつつある．Einstein 方程式は電磁場を記述する Maxwell 方程式と同じく真空中を伝搬する重力波の存在を予言している．この重力波を用いた本格的な観測が数年後に始まる．人類はこれまで主に光を観測で用いてきた．いま人類は記念すべき第一歩を踏みしめようとしている．まずは Einstein 方程式が予言する重力波の検出自体が重要であろう．当面のターゲットは天体現象に関する堅実なものであろうが（井岡氏の記事参照），宇宙誕生に迫る観測計画もすでに検討されている．

一般相対論は万物を記述すると期待されている超弦理論の低エネルギーで成り立つ有効理論として考えることもできる．超弦理論においてしばしば考察の対象となるのがブラックホールのエントロピーである．一般相対論と場の理論からそのエントロピーはブラックホールの表面（事象の地平面）の面積に比例している．通常の系ではエントロピーは体積に比例することになるが，ブラックホールはその表面に情報がストックされているようにみえる．このことから $d+2$ 次元の情報は $d+1$ 次元の系と等価であるという予想ができ（ホログラフィー原理），これはさらに adS/CFT 対応へとつながってゆく（高柳氏の記事参照）．さらに，最近では高柳・笠氏の観察によれば $d+1$ 次元空間の量子もつれに関するエントロピー（entanglement entropy）が，$d+2$ 次元の時空のある特定の d 次元面の面積に比例することが指摘されている．ブラックホールに直接関係しない系においても 1 つ高い次元でみると量子もつれに関するエントロピーが面積で書けるというのである．これは驚くべき事実である．また，このエントロピーの従う式が Einstein 方程式と関係があることも議論されており，重力理論や量子重力の新しい定式化のヒントを与えてくれているようにも思える．

4. 1998 年

1998 年はいろんな意味で重要な年であった．この年の本誌 8 月号において特集「重力の魅力」が組まれている．そこでは一般相対論を中心に重要で堅実な展開の記述がなされている．安定した一般相対論の発展・展開期のよいまとめとなっているように思う．それは激動以前のことであった．そして 1998 年に宇宙の加速膨張が発見された．また，同年に他の力と比べ重力がなぜこんなにも小さいのか，という問い（ゲージ階層問題）に対する一つの解答が余剰次元を用いた模型により与えられた．特に Randall と Sundrum によって提案された湾曲した余剰次元模型は宇宙論研究者の一部により精力的に研究がなされた．宇宙の加速膨張の発見と余剰次元模型の台頭以降，重力研究の流れも大きく変わったように思う．人々は Einstein 方程式を超える可能性を追求し始めたのである．一般相対論の検証研究は伝統的に存在するものの，他の重力理論研究はエキゾチックな研究分野という印象がかつては色濃くあり，多くの研究者は距離を置いていたように思う．大まかに 1998 年以前と以後で大学院に入学した研究者は幾分性質が異なる傾向があるように思う．

5. もうじき 100 年，そして 100 年後

本特集では重力の魅力ある部分と謎の部分を様々な角度で描かれている．執筆者は数十年の重力研究の変遷を把握している中堅以上の方々である．それぞれの切り口で重力について語っている．幾人かの執筆者が触れているように，一般相対論が生まれて間もなく 100 年になろうとしている．この特集号の 100 年後にどのような時代が到来しているか夢を抱きながら各記事を味わってほしい．重力波という新しい観測の道具を手にした人類はどのような宇宙を見ているであろうか．我々の予想だにしなかったものである，という結果が一番面白い．

（しろみず・てつや，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

アインシュタイン方程式

重力を方程式で記述する

前田　恵一

■　1. ニュートン重力を超えて　■

重力は非常になじみのある力である．ものを投げると，地球の重力により落ちてくる．この地上の落体運動と太陽系の惑星や月の運動が，同じ一つの力で統一的に表されることをニュートン（I. Newton）が示した．質量を持つすべての物体間にはその距離の二乗に反比例して引力（重力）が働くという有名な「**万有引力の法則**」である．この重力は保存力で，物体に働く重力加速度 $\boldsymbol{g}$ はニュートンポテンシャル Φ の勾配（$\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$）により与えられる．そして力の逆二乗則は，ポテンシャル Φ に対する**ポアッソン方程式**

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \qquad (1)$$

で記述される．ここで，Δ, G, ρ はそれぞれラプラス演算子，ニュートンの万有引力定数，重力源となる物体の質量密度である．このニュートンの重力理論は，様々な重力実験をよく説明し，また太陽系の天体などの観測とも矛盾しない完璧な理論と考えられた．

ところが，アインシュタイン（A. Einstein）が1905年に特殊相対性理論を提唱するや，ニュートン重力理論の立場が危うくなった．それは特殊相対性理論と相容れないからである．ニュートンの重力理論では，(1) 式のように基礎方程式に時間微分が含まれないので，物体の密度分布が与えられると，瞬時にそのポテンシャルが決定され，物体に働く重力も決まる．ところが，特殊相対性理論では，物体の速さや情報伝播速度に上限（光速度）があり，それを超えてはいかなる情報も伝えられない．物体の密度分布が決まった瞬間に働く重力が決まるというのはこの事実に反するため，この2つの理論は矛盾するのである．

当然，物理学者たちは，特殊相対性理論と矛盾しない重力理論，**相対論的重力理論**を探し始めた．もちろんアインシュタインもその1人である．しかしその方法は，ポアッソン方程式 (1) のラプラス演算子（Δ）を時間微分を含めたローレンツ不変なダランベール演算子

$$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$$

に置き換えればよいという単純なものではない．問題は，特殊相対性理論における質量とエネルギーの等価性に由来する．重力場（Φ）もエネルギーを持ち，等価性から質量密度 ρ にも寄与するはずで，相対論化された方程式は必然的に Φ の非線型方程式になる．

その答えを見つけたのは，やはりアインシュタイン自身である．本人が「生涯で最もすばらしいアイデア」と語った「**等価原理**」および，その後に思いついた「**曲がった時空**」の考え方を元に，1915年末に**一般相対性理論**を完成した．「等価原理」により重力のある系の物理を加速系の物理に置き換えることで，重力場中の赤方偏移・時間の遅れや光の屈折などを予言し，また回転円盤の思考実験

から，誰も考えなかった「空間の歪み」のアイデアにたどり着く[1]．これまでの物理学では，時間や空間はあくまで現象を記述するための便宜であって，物理的対象ではなかった．それが時空の歪みを重力場と捉え，時空そのものを物理学の対象に引き上げたのである．その意味で，アインシュタインのこの時空の物理学は，相対論的重力理論ではなく，一般相対性理論と呼ばれる．

■ 2. アインシュタイン方程式 ■

曲がった空間の数学的記述はリーマン（B. Riemann）が考え出した**リーマン幾何学**により可能であることを友人の数学者グロスマン（M. Grossmann）から教えてもらったアインシュタインは，相対論的重力理論の構築に取りかかる．

リーマン幾何学では，曲がった N 次元空間を記述する線素 ds^2 は**計量** g_{AB} により

$$ds^2 := g_{AB}dx^A dx^B$$

のようにはじめから与えられている[*1]．時空を考える場合は，ギリシャ文字の添え字（$\mu, \nu, \cdots$）を用い，時間（$\mu = 0$）と空間（$\mu = 1, 2, 3$）の 4 次元時空多様体 [座標：x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)] とする．線素 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ は，時間座標を含むため正定値ではない．

アインシュタインが考えた曲がった時空では，重力場は計量で表される．リーマン幾何学では計量は与えられたものであるが，相対論的重力理論を構築するには，計量を決定する方程式を見つける必要がある．それは，ニュートン重力理論では重力場 Φ はポアッソン方程式 (1) で決定され，それを相対論的に拡張するには (1) に対応する相対論的重力場（計量）の方程式を探し出さなければならないからである．計量を決定する方程式はリーマン幾何学にはなく，新たにそれを見つけるのにアインシュタインはさらに苦労する．

アインシュタインが悪戦苦闘しつつも見つけ出したその方程式の導出を，今日の考え方でまとめておこう．基本となる前提は次の 3 つである．

[1] 一般相対性原理

任意の観測者に対して物理法則は不変，つまり法則を記述する基本方程式は一般座標変換に対して不変であるとする．その結果，法則はテンソル方程式で記述される．

[2] エネルギー・運動量保存則

系のエネルギーおよび運動量は保存されるとする．つまり，エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ に対して

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

が成り立つ．∇_ν は共変微分．

[3] 弱場近似でニュートン重力理論を再現

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$
$$\eta_{\mu\nu}\text{: ミンコフスキー計量}$$

の極限でポアッソン方程式 (1) が得られる．

以上の仮定から**アインシュタイン方程式**として知られている次の相対論的重力方程式が得られる[2]．

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2}$$

ここで $R_{\mu\nu}$, R はそれぞれリッチ曲率テンソル，スカラー曲率で，それらは

$$R_{\mu\nu} := \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\ \mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\ \beta\alpha}\Gamma^\beta_{\ \mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\ \beta\nu}\Gamma^\beta_{\ \alpha\mu},$$
$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

で定義される．また，接続 $\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}$ は

$$\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} := \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}\right)$$

で与えられる．定義式からわかるように曲率は計量 $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分で記述され，計量が重力ポテンシャルを表していることを考えると，この式がニュートン重力理論の満たすべき方程式 (1) の拡張であることは容易に想像できる．実際，$g_{00} \approx -1 + 2\Phi$ ($\Phi \ll 1$) と置くと (2) から (1) が導ける．

アインシュタイン方程式 (2) は，変数が計量テンソル（独立成分は 10 個）の非線形偏微分方程式であることから，その解を求めることだけでも非常に困難で，その宇宙物理学への具体的応用は

---

*1) 本稿ではアインシュタインの縮約則（同じ添え字に対しては次元数すべてに対して和をとる）を用いる．

1960 年代以降になる[3].

■ 3. アインシュタイン方程式の検証 ■

アインシュタインは一般相対性理論を思考実験による考察のみから構成した．本当にそれが自然界の重力を記述しているのであろうか？ ニュートン重力理論を相対論的重力理論に拡張する方法は他にないのであろうか？

実は，ニュートンポテンシャル Φ そのものを基本変数（重力場）とするアプローチは，アインシュタインを含め多くの科学者がはじめに考えていた．アインシュタイン自身は，「等価原理」のアイデアを得てからは別のアプローチを模索していったが，ノルドシュトルム（G. Nordstrøm）は，**スカラー重力場** Φ により，アインシュタインとは独立に相対論的重力理論をつくりあげた．この理論は等価原理も満たし，弱重力極限でニュートン重力理論になる．

どちらの理論が正しいのであろうか？ 理論的にそれを判定することはできない．実験や観測がそれを決める．それには相対論的効果の違いを調べる必要がある．太陽系における相対論的効果として観測可能なものは次の 3 つが知られている[4].

(i) 水星の近日点移動

ニュートン重力では楕円軌道は閉じるので近日点は変化しないが，相対論的効果を考えると少しずつずれる．観測によると水星の近日点は 100 年間で前方に (42.56 ± 0.94) 秒角移動する．

(ii) 太陽近傍を通過する光の屈折

重力場中の光の屈折は，等価原理による部分と空間の歪みによる部分の 2 つからなる．アインシュタイン自身ははじめ（1911 年以前）は等価原理によるものだけを予言しており，一般相対性理論の予想値（1.75 秒角）の半分であった．もし一般相対性理論完成前に観測結果が出ていれば，「アインシュタインは間違っていた」と言われたかもしれない．

(iii) シャピロ遅延

シャピロ（I.I. Shapiro）により提案された実験で，宇宙探査機や惑星上に設置された反射板から地球に送られてくる電波信号が，電波が太陽近傍を通過するときに遅れるという相対論的効果を測るものである．予想される遅れは

$$\Delta t = \left(240 - 20 \ln \left[\frac{(d/R_\odot)^2}{(r_p/\mathrm{AU})}\right]\right) \text{ マイクロ秒}$$

で与えられる．ここで，d, r_p は，それぞれ電波が太陽に最も近づいたときの距離および地球から惑星までの距離である．

これらの相対論的効果の観測値が，アインシュタインの一般相対性理論の予想値と一致したのである．ノルドシュトルムの重力理論によると，近日点移動および光の屈折の予想値はそれぞれ一般相対性理論の予想値の $-1/6$ 倍および $1/2$ 倍になり，観測値を説明できない．つまり，ノルドシュトルムの重力理論は観測的に否定されることとなった．

■ 4. アインシュタイン方程式だけだろうか？ ■

アインシュタインの理論は，連星パルサーの観測を含め，これまでの検証実験から正しいことがわかっている[5]．それではアインシュタイン理論が観測を説明できる唯一の重力理論なのであろうか．もちろんいろいろな観測や実験による検証を重ねることで，その答えが明らかになるが，考えられる可能性は科学者として追求しておく必要がある．

力は，ミクロな立場から見ると，ボーズ粒子の交換として記述できる．スピン 0 の**スカラー場**，スピン 1 の**ベクトル場**，スピン 2 の **2 階テンソル場**などにより力は表される．実際，よく知っている電磁気力はベクトル場で表されている．

一般に，スカラー場や 2 階テンソル場は引力を記述し，ベクトル場の表す力は（同粒子間では）斥力になる．重力は万有引力であるのでベクトル場では記述できず，一般相対性理論やノルドシュトルムの重力理論は，それぞれ計量（2 階テンソル場）やスカラー場により理論が構成されている．

スカラー場は観測値を説明できないので，計量で理論が構成されているとしよう．このとき，ア

インシュタイン方程式だけが可能な重力方程式であろうか？ 最小作用の原理により基礎方程式が導かれるとすれば，一般相対性理論は作用が

$$S=\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,[R(g)-2\Lambda] \qquad (3)$$

で与えられる．ここで Λ は，アインシュタインがその導入に対し「生涯最大の失敗」と言った宇宙定数である．そして基礎方程式が計量の 2 階微分までで記述されると仮定すれば，作用 (3) が唯一であることが証明できる．

■ 5. アインシュタイン方程式を超えて ■

アインシュタイン方程式は，提唱されてからほぼ 100 年を経過し，実験や観測はその理論が正しいことを示している．では，どうしていまさらそうでない重力理論を考えるのであろうか．それにはいくつかの理由がある．まず，一般相対性理論は普遍的に特異点の出現を示唆し，そこでは**量子重力理論**が必要となる．ところがアインシュタイン方程式はくりこみ不可能で，量子論との相性が悪い．それでくりこみ可能な理論を模索したり，素粒子の統一理論の観点から重力を捉える試みが行われている．また，ビッグバン宇宙論は観測的に正しいことがわかっているが，最近の精密観測により宇宙論に新しい謎が生まれている．一つは，ビッグバン以前の初期宇宙に関するもので，誕生直後の宇宙が急激な加速膨張をしていたとする**インフレーション**宇宙モデルが標準的になっているが，このモデルは現象論的で，インフレーションを引き起こす源がわかっていない．素粒子統一理論などより基本的な理論からの理解が必要とされる．もう一つは，現在の宇宙が加速膨張していることが超新星観測などから示唆されているが，その原因は全くわかっておらず**ダークエネルギー**問題と呼ばれている．「万有引力の法則」は原理的に減速膨張を予言し，これらの加速膨張を説明するにはこれまでに知られていないメカニズムが必要とされる．アインシュタイン方程式は，実験や観測で検証されていると言ったが，それはあくまで地上や太陽系などの規模での話で，宇宙全体のような巨大なスケールで正しいかどうかわからない．また，宇宙初期などの強重力領域でも修正されるかもしれない．そこで以下では，これまでに考えられているアインシュタイン方程式を超えた重力理論の話を簡単にまとめておこう．

5.1 曲率高次項の寄与[6)]

ミクロな現象の解析においては量子効果を考える必要がある．重力を含む理論においてもいろいろな場の量子効果が重力の作用を変更する．場の発散を消すために正則化などを考えると (3) の作用に加えて，曲率高次の項（R^2, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ など）も現れる．これらの項は，一般に，2 階を超える高階の微分をもたらすため，アインシュタイン方程式とはかなり異なった振舞いを示す．

また，素粒子統一理論の有力候補である**超弦理論**の 1 ループ量子補正が場の理論の極限でどうなるか計算されており，弦理論のタイプによって補正項が異なることがわかっている．補正項を含む作用を結合定数 α' のべき展開で表すと

$$S=\int d^Dx\sqrt{-g}\sum_{n=1}c_n(\alpha')^{n-1}e^{-2(n-1)\Phi}L_n$$

のようになる．ここで D は時空の次元数，$L_1=R$ で，$L_2, L_3, L_4, \cdots$ は曲率の 2 次，3 次，4 次，… を含む複雑な項である．表 1 に計算された展開係数をまとめておく．

興味深い結果としては，曲率 2 次の補正は**ガウス・ボンネ項**

$$L_2=R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}-4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+R^2$$

という特別な形になり，基本方程式に高階微分を含まない．高階微分を含まない曲率高次の項はラブロック（D. Lovelock）によって一般的に求めら

表 1 弦理論と各項の係数．タイプ II 超弦理論では補正項は 4 次から現れる．

弦理論のタイプ	c_1	c_2	c_3	c_4
ボソン弦理論	$\frac{1}{16\pi G_D}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$
ヘテロティック弦理論	$\frac{1}{16\pi G_D}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
タイプ II 超弦理論	$\frac{1}{16\pi G_D}$	0	0	$\frac{1}{8}$

れており，時空の次元によってどこまでの項を含むかが決まってくる．例えば，D 次元時空であれば，$N \equiv [(D-1)/2]$*2) 次までの曲率高次項

$$L_m^{(L)} = \frac{1}{2^m}\delta^{a_1b_1\cdots a_mb_m}_{c_1d_1\cdots c_md_m}R_{a_1b_1}{}^{c_1d_1}\cdots R_{a_mb_m}{}^{c_md_m}$$

$(m \leq N)$ を含む．ここで $\delta^{a_1b_1\cdots a_mb_m}_{c_1d_1\cdots c_md_m}$ は $2m$ 個のクロネッカーデルタの積を完全反対称化したものである．

これらの曲率高次項は，興味深いことに，宇宙項がなくても（さらには負でも）加速膨張解であるドジッター時空を解として含む．その結果，宇宙初期のインフレーションモデルにも応用されている．

5.2 ハイブリッド重力理論

スカラー場やベクトル場では重力を説明できないと言ったが，2 階テンソル場と一緒に考えることで，実験と矛盾しないハイブリッドタイプの新しい重力理論が構成可能になる[7]．

5.2.1 スカラー・テンソル重力理論

計量（2 階テンソル場）とスカラー場が共存する重力理論を**スカラー・テンソル重力理論**と称するが，その代表格が**ブランス・ディッケ重力理論**である．一般相対性理論をつくるときにアインシュタインの頭に常にあったのが「**マッハの原理**」である．マッハ（E. Mach）はニュートン力学を解析し直し，慣性は物体固有のものではなく，宇宙全体の物質分布が影響すると考えた．一般相対性理論は，宇宙の物質分布が局所的な時空構造を決めるという意味では，このマッハの原理の思想を受け継いでいると考えられる．しかしながら物体そのものの慣性を決めるわけではないからマッハの原理を実現する理論ではない．

物体の質量 m を直接測定することは難しく，通常重力加速度 Gm/r^2 を測定することで決定されるが，必ず Gm の形で現れる．その結果，「G が普遍定数ではなく宇宙の物質と相互作用するスカラー場 ϕ の期待値で与えられるとすると，このマッハのアイデアが実現される」というのがブランス（C. Brans）とディッケ（R.H. Dicke）のアイデアである．

2 人が考え出した重力理論の作用は

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi}\left(\phi R - \frac{\omega_{\rm BD}}{\phi}(\nabla\phi)^2\right) + L_m\right]$$

で与えられる．$\omega_{\rm BD}$ は結合定数である．物質場のラグランジアン L_m にはスカラー場 ϕ は含まれないので，ブランス・ディッケ理論は弱い等価原理を満足する．弱場近似で粒子の軌道を解析すると，万有引力定数 G は

$$G = \left(\frac{2\omega_{\rm BD}+4}{2\omega_{\rm BD}+3}\right)\frac{1}{\phi} \tag{4}$$

のように得られ，スカラー場 ϕ の逆数で表される．スカラー場の方程式は

$$\Box\phi = \frac{8\pi}{2\omega_{\rm BD}+3}T$$

で与えられ，宇宙に存在する物質場がスカラー場 ϕ の値を決めるので，マッハ原理の考えが取り入れられていると考えられる．

ブランス・ディッケ理論では，重力定数 G はスカラー場 ϕ で表されるため，時間的に変化し得る．しかし，G の時間変動に関しては観測的には次のような制限がある．例えば，現在の変化率 $\left(\dot{G}/G\right)_0$ は，月面レーザー測量からは $(4\pm9)\times10^{-13}$/年，連星パルサーの観測からは $(4\pm5)\times10^{-12}$/年 となっている．これは，宇宙年齢が $H_0^{-1}\sim10^{10}$ 年であるから仮に時間変動があるとしても，宇宙論的に自然な変動モデルは得られない．

また，太陽系内の光の屈折やシャピロ遅延の観測からもこの理論は大きく制限される．最も強い制限は土星に向かっていたカッシーニ衛星のドップラー追跡における時間の遅れの測定から得られたもので，この測定結果をブランス・ディッケ理論に当てはめると $\omega_{\rm BD} > 40,000$ という制限が得られる．

ブランス・ディッケ理論ではスカラー場と計量の結合の仕方が限定されていたが，結合定数 $\omega_{\rm BD}$ をスカラー場の任意関数 $\omega(\phi)$ に拡張すると，より一般的になる．このような理論を一般にスカラー・テンソル理論と呼ぶが，$\omega(\phi)$ の現在の値は上と同じ制限を受ける．$\omega\to\infty$ で理論は一般相対性理

*2) $[x]$ は x の整数部分をとるガウス記号．

論に一致するので，この理論は少なくとも現在では極めて一般相対性理論に近いことになる．

5.2.2 その他のハイブリッド重力理論

スカラー・テンソル理論以外にもいろいろなハイブリッド重力理論が提案されている．その一つに**ベクトル・テンソル理論**がある．これは計量以外に時間的なベクトル場 u^μ を加えるもので，このベクトルに拘束条件を与えるかどうかで2つのタイプに分かれる．拘束条件として $u_\mu u^\mu = -1$ とするものを**アインシュタイン・エーテル理論**と呼ぶ．特別な時間方向を与える普遍的なベクトル場 u^μ をここではエーテル場と呼んでいる．

ベクトル・テンソル理論の作用は次のような形で与えられる．

$$S_g = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[(1+\omega u_\mu u^\mu)R - K^{\mu\nu}_{\ \ \alpha\beta}\nabla_\mu u^\alpha \nabla_\nu u^\beta + \lambda(u_\mu u^\mu + 1)\Big].$$

ここで

$$K^{\mu\nu}_{\ \ \alpha\beta} = c_1 g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + c_2 \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta + c_3 \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha - c_4 u^\mu u^\nu g_{\alpha\beta}$$

である．λ はラグランジュの未定定数．拘束条件のない理論（$\lambda = 0$）では ω がさらに任意定数として加わり，アインシュタイン・エーテル理論では $\omega = 0$ とおくことができる．

任意定数 c_1, c_2, c_3, c_4 は太陽系などの実験や観測から制限を受ける．例えば，アインシュタイン・エーテル理論で光の屈折や近日点移動に関しては一般相対性理論と同じ値を予言するので制限はつかない*3)が，重力波の振動数が実であることやエネルギーの正定値性などの理論の整合性から $c_1 \sim c_4$ は制限される．

さらに，ダークマターを重力理論の修正により説明しようとする**MOND**（Modified Newtonian Dynamics）理論を動機にした**テンソル・ベクトル・スカラー重力理論**（TeVeS 理論）も提唱されているが，太陽系近傍の観測を含めいろいろ問題点はありそうである．

5.3 ローレンツ対称性を破る？

一般相対性理論がくりこみ不可能で量子化できないということを述べたが，その解決方法として素粒子の統一理論や非摂動的な正準量子化の方法（例えばループ量子重力理論）とは異なる試みが最近提案されている．2009 年にホジャバ（P. Hořava）が考えた理論で，高エネルギー極限におけるスケーリングを時間方向と空間方向で異なるようにしたもので，**ホジャバ・リフシッツ重力理論**と呼ばれる[8]．通常，特殊相対性理論の成り立つミンコフスキー空間では，時間方向と空間方向は同じようにスケールするローレンツ対称性が存在する．一般相対性理論を含めた現在のほとんどの場の理論では，このローレンツ対称性が（局所的には）成り立つものと仮定されており，その結果，一般相対性理論はくりこみ不可能になる．

ホジャバは，時間方向と空間方向で異なるスケーリングを考えることで，高エネルギー領域においてくりこみ可能なものにする理論を考えた．当然この理論ではローレンツ対称性は破れる．我々の世界では特殊相対性理論は正しいので，ローレンツ対称性は低エネルギー領域では回復しなければならない．あくまで高エネルギー極限で対称性が破れると考える．時間方向と空間方向で異なるスケーリングを考えるため，時間一定の超曲面は決定され，一般座標変換に対する理論の一般共変性はなくなる．また異なるスケーリング則を満たすため3次元曲率の高次項が必要となる．

この理論は，まだ本当にくりこみ可能であることが示されてはいないし，いくつかの理論的困難も内在している．しかしながら3次元曲率の高次項の存在は，宇宙初期の特異点問題を解決する可能性を示している点で注目されている[9]．

5.4 質量がゼロでない？

一般相対性理論で暗に仮定されているものとして，ローレンツ対称性の他にスピン2の重力子の質量がゼロというのがある．重力が長距離力と考えられるからであるが，理論的には重力子が質量を持っている可能性は否定できない．実際，1939

---

*3) $c_2 = (-2c_1^2 - c_1 c_3 + c_3^2)/3c_1$，$c_4 = -c_3^2/c_1$ を満たせば，弱場近似で一般相対性理論に完全に一致するので，観測的制限は2つの自由なパラメータのみが残る．

年，フィルツ（M. Fierz）とパウリ（W. Pauli）は線形重力理論で次のような質量項を考えている[10]．

$$-\frac{1}{2}m^2\left(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}-h^2\right).$$

ここで，線形重力場は $h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}\ (|h_{\mu\nu}|\ll 1)$ で与えられる．$h=\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ で，m は重力子の質量である．観測的には，$m<7.6\times10^{-20}\,\mathrm{eV}$（連星パルサー PSR1534+12）や $m<8.5\times10^{-24}\,\mathrm{eV}$（パルサー・タイミング）という制限がある．

この質量項はゴーストがないことから決まるが，理論は $m\to 0$ の極限で一般相対性理論に一致しないという不連続性の問題があった．その問題は重力場の非線形効果を考えると解消される（**バインシュタイン機構**）ことがわかったが，逆に重力の非線形性を考えるとゴーストが現れることがすぐに示され，重力子に質量を持たせるのは原理的に困難になった．しかし最近，特別な形の相互作用項（非線形な質量項）を考えるとゴーストがなくなることが示され[11]，**有質量重力**（massive gravity）**理論**は再び興味を持たれるようになった．特に，重力子が質量を持つと，相互作用項が実質的に宇宙項の役割をすることがわかり，現在の宇宙の加速膨張が説明できる可能性が生まれ，一躍，注目されるようになった．もっとも現在の加速膨張を説明するには，質量が $m\sim10^{-33}\,\mathrm{eV}$ ととてつもなく小さくないといけないが….

またこの理論を拡張したものとして，計量を 2 つ仮定する**二重力**（bigravity）**理論**も提唱されている[12]．一つの時空に 2 つの計量が存在するのは奇妙に思えるかもしれないが，高次元時空に存在するブレインワールドのような世界では複数の計量は自然に現れる．この理論では 2 つの計量が比例する場合，相互作用項は単に宇宙項として振る舞い，それぞれの計量は一般相対性理論のアインシュタイン方程式に従う．このような比例する計量の時空は普遍的なアトラクターとして現れ，この理論ではアインシュタイン方程式がダイナミカルに実現される[13]．非常に小さな重力子の質量の起源などまだわかっていないことはたくさんあるが，新しく興味深い重力理論の試みである．

■ 6. 今，重力理論が面白い ■

以上見てきたように，アインシュタイン方程式を超えて新しい重力理論を探求する傾向は，ダークエネルギー問題が現れてから，顕著になっている．もちろん素粒子統一理論や量子重力理論の問題も重要な動機になっているし，インフレーションを引き起こす基礎理論がわかっていないのもそれに拍車をかけているように見える．

ただ，新しければ何を考えても良い時代ではなく，様々な実験や詳細な観測データにより，百花繚乱する重力理論のどれが正しいかを検証できる時代でもある．一般相対性理論誕生から 100 年，今まさに新しい物理学が生まれようとしている非常に面白い時代でもある．

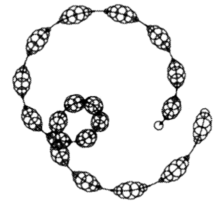
参考文献

1) 詳細は，前田恵一『重力理論講義』(SGC ライブラリ 63，サイエンス社，2008 年) 第 3 章参照.
2) 詳細は，前田恵一『重力理論講義』(SGC ライブラリ 63，サイエンス社，2008 年) 第 4 章参照.
3) 詳細は，前田恵一『重力理論講義』(SGC ライブラリ 63，サイエンス社，2008 年) 第 6–8 章参照.
4) 詳細は，前田恵一『重力理論講義』(SGC ライブラリ 63，サイエンス社，2008 年) 第 5 章参照.
5) C.M. Will, The Confrontation between General Relativity and Experiment, *Living Rev. Relativity* **9**, 3 (2006).
6) 詳細は，前田恵一『重力理論講義』(SGC ライブラリ 63，サイエンス社，2008 年) 第 17 章参照.
7) 詳細は，前田恵一『重力理論講義』(SGC ライブラリ 63，サイエンス社，2008 年) 第 15 章参照.
8) P. Hořava, *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009).
9) R. Brandenberger, *Phys. Rev. D* **80**, 043516 (2009); K. Maeda, Y. Misonoh, T. Kobayashi, *Phys. Rev. D* **82**, 064024 (2010).
10) M. Fierz and W. Pauli, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **173**, 211 (1939).
11) C. de Rham, G. Gabadadze and A.J. Tolley, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 231101 (2011).
12) S.F. Hassan and R.A. Rosen, *J. High Energy Phys.* **02**, 126 (2012).
13) K. Aoki, K. Maeda, *Phys. Rev. D***89**, 064051 (2014).

（まえだ・けいいち，早稲田大学理工学術院）

幾何学からみた重力

直線と潮汐力



石橋　明浩

1. 一般相対論と幾何学

ちょうど1世紀前にアインシュタインが一般相対性理論（一般相対論）を発表して以来，重力と幾何学は切っても切れない関係にあります．それは一般相対論が，重力を時間・空間そのものの幾何学的性質と捉える理論だからです．その基本原理の一つは「物理法則は座標の取り換えで形を変えない」という要請です．何らかの変換・操作の下で不変な性質，特に座標系のとり方に依らない特徴を抽出するのが幾何学です[1]．着目する変換により様々な幾何学がありますが，一般相対論の基本原理を定式化するのはリーマン幾何学です．そこではユークリッド幾何学における直観的，経験的に馴染みのある空間概念を，より抽象的に“多重に拡がったもの”を意味する多様体という概念に一般化します．そして，距離を規定する計量やそれに伴う内在的な曲率の概念を導入します．そうした幾何学量が一般相対論では重力ポテンシャルや潮汐力といった物理量を表します．一般相対論の物理学における最も大きな意義の一つは，重力をはじめとする物理法則を現代幾何学の観点から理解する方法の端緒を開いたことでしょう．

さて，幾何学といえば図形であり，ユークリッド幾何学での直線はその基本要素です．では“直線”とは何でしょうか？ その特徴として直観的に直ちに思いつくのは，

(A)　真っ直ぐな線，
(B)　2点を最短距離で結ぶ線

でしょう．さらに素朴なイメージとして

(C)　どこまでも無限に伸びている線

を思い浮かべる人もいるかもしれません．しかし，リーマン幾何学の世界では (A), (B) は必ずしも同じことではなく，一定のスピードで真っ直ぐ進んでいるつもりが，いつのまにか遠回りな曲線を描いていることが起こり得ます．いわば“局所的な直線”と“大域的な直線”の概念があるといっても良いでしょう．また直線の持つ (C) の性質も一般に非自明となります．そして，ユークリッド空間での直観に基づく直線の特徴と，リーマン幾何学における (A), (B), (C) の違いが，一般相対論では重力の本質である“潮汐力”の効果により顕在化します．その端的な例として，本稿では一般相対論における特異点定理とその剛性を意味する分解定理を概観します．

2. 測地線 vs. 直線

リーマン幾何学では，(A) の“真っ直ぐな”という特徴は**平行移動**の概念で定式化されます．つまり「曲線に沿ってその接ベクトルを平行移動したものがやはり同じ曲線の接ベクトルとなっている」場合に，その曲線を真っ直ぐな線と見なし**測地線** (geodesic curve) と呼びます．もう少し具体的に定義するため，例えば丸い地球の上での測地線はどのようなものかを考えてみます．地球が丸いといっても「日本国内の○○市の地図を描く」といった具合に地球の半径に比べて十分小さい領域を考えるときは近似的に“平坦な空間”と見なして良いので，平らな日本地図上での南北東西を表す直交座標 $X^\alpha = (X^1, X^2)$ を考えることができます（図 1）．すると，助（媒介）変数を t とする曲線 $\gamma(t)$ が真っ直ぐ進む線であるとは，等速直線運動の方程式

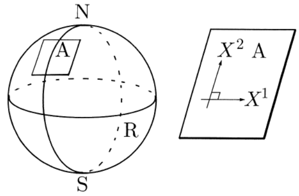


図 1　2 次元球面上の近似的に平坦な微小領域での直交座標系 X^α と A を通る測地線（大円）.

$$\frac{\mathrm{d}^2X^\alpha}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{1}$$

を満たすことといって良いでしょう．

この方程式は，あくまで直交座標系が良い近似でとれるような極局所的領域で表したもので，日本地図の範囲をはみ出し地球の丸みが現れてくる領域まで広げて考え出すと，もはや成り立つ保証がありません．そこで，地球表面の曲がり具合まで含めて記述するために，より一般の座標系 x^μ へ座標の取り換えをします．座標変換 $X^\alpha \to x^\mu$ で $\mathrm{d}X^\alpha/\mathrm{d}t=(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t)(\partial X^\alpha/\partial x^\mu)$ となることを考慮すると，(1) 式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right)=-\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{dt} \tag{2}$$

と表されます．右辺の $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ は，

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}:=\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu}\frac{\partial^2X^\nu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} \tag{3}$$

で与えられ，座標変換 $X^\alpha\to x^\mu$ が一般に線形変換でないために現れる量です．この方程式 (2) は**測地線方程式**と呼ばれます．ここで $V^\mu=\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$ として，(2) 式を以下のように書き表すことができます：

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}V^\mu:=\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}\left(\delta^\mu{}_\nu\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}\right)V^\nu=0\,. \tag{4}$$

さらに V^μ がもともと測地線 γ の接ベクトルであったことを忘れて任意のベクトルだと思うことにします．すると (4) 式はベクトル V^μ に対して線形であり，かつ γ の接ベクトル $\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}t$ が左に括り出されているので，V^μ の曲線 γ に沿った方向微分であると解釈できます．すると，この微分方程式 (4) を解くことで，V^μ を曲線 $\gamma(t)$ に沿って動かすことができます．逆に，一般座標変換の下で方程式 (4) をベクトル的に変換させるような何らかの量 $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$（必ずしも (3) 式で与えられるものでなくてもよい）が導入されたとき，任意のベクトルを曲線 $\gamma(t)$ に沿って動かす手続が定義されたと見なすことができます．このとき (4) 式の解は，「V^μ の $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ による $\gamma(t)$ に沿った平行移動」といい，平行移動の手続を与える Γ を**線形接続**といいます．また (4) 式の括弧内の微分演算子を ∇_α と記して，$\nabla_\alpha V^\mu$ を V^μ の**共変微分**と呼びます．この記号を使うと測地線方程式 (2) は $V^\alpha\nabla_\alpha V^\mu=0$ と表され，接ベクトル V^μ を自分自身の方向に平行移動しても変わらないという意味で真っ直ぐ進むという性質 (A) を，一般的に表していることが分かります．

次に距離の概念を述べておきます．一般にリーマン多様体 (M,g) 上の曲線 $c:[a,b]\ni t\mapsto c(t)\in M$ が与えられたとき，その**長さ**（arc length）を

$$L(c):=\int_a^b\|\dot c(t)\|\mathrm{d}t \tag{5}$$

と定義します．ここで $\dot c$ は c の接ベクトルを表し，g を正定値，つまりその固有値がすべて正となる計量として，$\|\dot c(t)\|:=\sqrt{g(\dot c(t),\dot c(t))}$ としています．また，積分区間で b を t に置き換えたものを，曲線 c の始点 $p=c(a)$ から $c(t)\in M$ までの**弧長** $L(t)$ と呼びます．曲線が途中で止まったりしない場合（$\dot c\neq 0$）には，逆に弧長 $L(t)$ を曲線の助変数に使うことができ，そのとき速度ベクトル $\dot c(t)$ は $g(\dot c,\dot c)=1$ と規格化されます．この弧長を用いて（連結な）多様体 M 上に**距離**（distance）を導入することができます．まず，$C(p,q)$ を 2 点 $p,\,q\in M$ を結ぶすべての（区分的に滑らかな）曲線 c の集合とします．そして 2 点 $p,\,q$ 間の距離を

$$d(p,q):=\inf\{L(c):c\in C(p,q)\} \tag{6}$$

と定義します．この距離関数 d は次の三角不等式を満たします：

$$d(p,r)\leqslant d(p,q)+d(q,r)\,. \tag{7}$$

特に，弧長 L を助変数とする測地線 $c:\mathbf{R}\to M$ が

$$d(c(L_0),\,c(L_1))=|L_0-L_1| \tag{8}$$

の関係を任意の L_0,L_1 に対して満たすとき，測地線 c を**直線**（line）といいます．つまり直線とは，「その上の任意の 2 点を最短距離で結ぶ曲線」です．

(A) の測地線と (B) の直線を定義したので，次にその違いが現れる状況を 2 次元球面である地球表面の例で考えてみます．少し天下り的ですが 2 次元球面上での測地線は “大円”（球面と中心を通る平面との交わり）であることを認めて話を進めます（図 1）．経線はすべて大円ですから，例えば北極 N から東経 135 度にある A 市へと移動するには，東経 135 度の経線に沿って移動するのが “真っ直ぐ” 進むことであり，最短

距離となっていることも直観的には地球儀を眺めれば明らかでしょう．では，北極 N と南極 S を結ぶ最短経路は？と聞かれると，やはり東経 135 度線に沿って真っ直ぐ行っても良いのですが，すべての経線が北極と南極を通る大円ですから，N と S を結ぶ最短の測地線は無数にあるということになります．さらに，東経 135 度の経線に沿って，南極をぐるりと越えて北上し，リオ・デ・ジャネイロ市あたりの地点 R と北極 N を結ぶことを考えます．この場合，測地線だからといっても，もはや最短とはならず，むしろ西経 45 度線に沿って南下したほうが短いことは明らかです（図 1）．

リーマン幾何学では直線の性質 (C)，すなわち，測地線がその弧長助変数について無限に伸ばせることを，測地的に**完備**（geodesic completeness）といいます．正定値計量のリーマン多様体 (M, g) については，完備性 (C) と (A) や (B) の関係として，ホップとリノウ（Hopf–Rinow）による次の定理が成り立ちます*1)．

定理 1.

リーマン多様体 (M, g) が測地的に完備であれば，任意の 2 点は最短な測地線で結ばれる．

ここまでの要点をまとめておくと，ユークリッド空間での直観的な直線の特徴は，リーマン幾何学では以下のように受け継がれます：

- **(A)**：真っ直ぐ ⇒ 測地線（局所的には最短）．
- **(B)**：最短距離 ⇒ 直線（大域的にも最短）．
- **(C)**：どこまでも伸びている ⇒ 完備．

地球表面の例から得られた教訓は，**測地線はいつでも直線になるとは限らない**ということになります．

3. 一般相対論

一般相対論は，太陽系から宇宙全体に渡るマクロなスケールでの重力を記述する，現在のところ最も確かな理論です．その基本原理は「一般共変性」と「等価原理」とで，前者は冒頭でも述べた「すべての物理法則は一般座標変換で不変（共変）」という要請です．これは物理量を多様体上のテンソル場として記述することで定式化されます．後者は「重力は十分小さな領域では適当な座標変換により常に消すことができる」という要請です．一般相対論で用いる計量は，その固有値の一つが負となるようなローレンツ符号を適用します．そのような計量をもつリーマン多様体 (M, g) は，しばしば**ローレンツ多様体**または単純に**時空**と呼ばれます．適切な座標系では計量 $g_{\mu\nu}$ が特殊相対論のミンコフスキー計量 $\eta_{\alpha\beta}$*2) に帰着するという要請が等価原理の定式化となります．それを実現する座標系を**局所慣性系**と呼びます．これにより計量テンソル場 $g_{\mu\nu}$ を基本量とする重力理論が，リーマン幾何学 $(M, g_{\mu\nu})$ により実現します．

一般相対論の基礎方程式であるアインシュタイン方程式は，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を力学変数とし，その解としてローレンツ多様体を決定する非線形偏微分方程式です．計量の高々 2 階微分からなるリッチ曲率 $R_{\mu\nu}$ とスカラー曲率 $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$，および物質のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ により

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \qquad (9)$$

と表されます．ここで κ^2 は，光速 c と重力定数 G により $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$ と定義された定数です．この方程式は，曲率テンソルを物質のエネルギー・運動量と結び付ける型になっているので，“物質の存在は時空を曲げ，その曲がり具合が重力である” と説明されます[2]．

4. 時空幾何のプローブ

さて，このようにアインシュタイン方程式で定まる時空ですが，その幾何学を探査するのに良い方法は，自由（プローブ）粒子の集団の振舞いを調べることです．これは，時空計量がローレンツ符号を持つため，物理対象や観測者の世界線に対応する因果的（時間的または光的）な曲線に専ら興味があるからです．この場合（区分的に滑らかな）因果的曲線 $\gamma(t)$ の弧長 $L(t)$ は，やはり (5) 式で与えられますが，ローレンツ符号のため $\|\dot{\gamma}\| := \sqrt{-g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$ とします．また，ローレンツ多様体 (M, g) における距離 $d : M \times M \to \mathrm{R} \cup \infty$ を (6) 式と同様に定義します．ただし inf を sup に置き換える必要があり，そのため三角不等式の代わりに次の**逆三角不等式**を満たすことがわかります（図 2 (a)）：

$$d(p, r) \geqslant d(p, q) + d(q, r)\,. \qquad (10)$$

*1) 例えばユークリッド空間で 2 点 p, q を通る直線上の一点を除いた空間を考えます．そのような空間はもはや測地的に完備でなく，p, q を結ぶ最短曲線も存在しなくなります．距離の定義式 (6) で “最小値” でなく “inf” としているのは，そのような場合にも適用できる定義にするためです．

*2) 対角行列として表すと $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$．

ここで $p < q < r$ の順で未来の点を表します[*3]．また $p, q \in M$ が因果的な関係を持たない場合には $d(p,q) = 0$ とします．三角不等式の向きを変えただけですが，もはや距離に上限がありませんから，例えば同じ時空内部の 2 点 $p, q \in M$ に対して，距離が無限大 $d(p,q) = \infty$ ということも起こり得ます．この逆三角不等式から**時間的直線**を，(8) 式を用いて，「その上の任意の 2 点間の距離（時間間隔）を最大にする時間的測地線」と定義できます．

以下では特に自由 (試験) 粒子の集団の振舞いを調べることにします．自由粒子とは外力が働かない粒子のことですから，その世界線は方程式 (2) に従う測地線となります．ただし，今度は地球表面でなく 4 次元時空を考えており，x^μ は 4 次元座標です．また助変数 t は粒子の世界線の弧長 $L(\gamma) = t$ そのものと見なすことができます．そのような助変数を**固有時間**と呼びます．ここでニュートン力学における重力ポテンシャル $\phi_{\rm N}$ 中を運動する粒子の運動方程式 $m\ddot{x}^i = -m\partial\phi_{\rm N}/\partial x^i$ と (2) 式を比較すれば，(3) 式の接続係数 $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ こそが重力加速度に対応することが見て取れます．

一般相対論での線形接続 Γ はどんなものでも良いかというとそうではありません．上で見たように線形接続は重力加速度に対応しますから，等価原理の要請から適当な座標変換により $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$ とできなければなりません．このためには，$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$ のように 2 つの下付き添え字について対称である必要があります．さらにベクトルの内積が平行移動で保たれるように，$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ を要請すると，接続係数 $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$ は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} \left(\partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \right)$$

と一意的に決定されます．ここで $g^{\mu\nu}$ は，計量の成分 $g_{\mu\nu}$ の逆行列です．また $\partial_\alpha := \partial/\partial x^\alpha$ と略記号を使っています．このように決まる接続を**リーマン接続**と呼びます．弱い重力場のときに，$g_{00} \simeq -1 - 2\phi_{\rm N}/c^2$，と置くと，ちょうど $\Gamma^i{}_{00} \simeq \partial^i \phi_{\rm N}/c^2$ となり，重力加速度と一致することが確認できます．

さて，一つ一つの自由粒子に対しては，必ず運動方程式が (1) 式となるような局所慣性系 X^α をとることができますが，自由粒子の集団全体に対する局所慣性系はいつでもとれるとは限りません．これは，2 つの近接する測地線の関係を見てみると分かります．自由粒子

*3) 平坦な時空の場合には，この逆三角不等式は特殊相対論における“双子のパラドックス”の説明に他なりません．

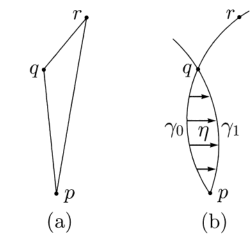


図 2 (a)：逆三角不等式 $d(p,r) \geqslant d(p,q) + d(q,r)$．
(b)：測地線 γ_0 のヤコビ場 η と共役点の組 p, q．

の測地線 $\gamma(t)$ に対して測地線束を $s \in (-1, 1)$ でラベル付けして $\gamma(t,s)$, $\gamma(t) = \gamma(t,0)$ と表し，隣接する 2 つの測地線の間の変位をベクトル $\eta^\mu = \partial x^\mu(t,s)/\partial s$ とします．変位ベクトル η^μ は**ヤコビ（Jacobi）場**とも呼ばれます．すると変位ベクトルの速度 v^μ は，η^μ を γ の接ベクトル $V^\mu = \partial x^\mu(t,s)/\partial t$ で共変微分した $v^\mu = D\eta^\mu/\partial t$，加速度 a^μ は v^μ をさらに V^μ で共変微分したものになります．導出は割愛しますが結果は

$$a^\mu := \frac{D^2}{\partial t^2}\eta^\mu = -R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu V^\beta \eta^\alpha \qquad (11)$$

となります．ここで $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ はリーマン曲率と呼ばれ，接続係数を用いて

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\nu} \qquad (12)$$

と与えられます．先ほどアインシュタイン方程式に用いたリッチ曲率 $R_{\mu\nu}$ は，このリーマン曲率から $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ という縮約操作によって得られます．方程式 (11) は**測地線偏差の式**またはヤコビの方程式と呼ばれます．リーマン接続 Γ が重力加速度なので，その微分 $\partial\Gamma$ を含むリーマン曲率は潮汐力に対応することが分かります．実際，$g_{00} \simeq -1 - 2\phi_{\rm N}/c^2$ とすると，$R^i{}_{0j0} \simeq \partial^i \partial_j \phi_{\rm N}/c^2$ です．等価原理により接続係数を消すことができても，リーマン曲率は一般に消すことはできず，次の幾何学的な定理が成り立ちます[3]．

定理 2.
時空が平坦となるための必要十分条件は，リーマン曲率がゼロとなることである．

5. 共役点 vs. 直線

リーマン曲率がゼロでない場合には，測地線偏差の式 (11) より，隣接する測地線は互いに近づいたり遠の

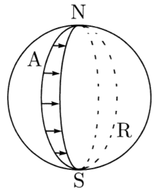


図3　2次元球面上の測地線束：ヤコビ場と共役点.

いたりします．特に，恒等的にゼロでないヤコビ場 η^μ が，ある点 p で $\eta^\mu|_p = 0$ であり，それが測地線 γ 上の別の点 $q \neq p$ で $\eta^\mu|_q = 0$ となるとき，q を p の**共役点**（conjugate point）といいます（図 2(b)）．

地球表面の例では，北極 N と南極 S の 2 点が共役点の組になっています．具体的に半径を l として，2 次元球面の計量は $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = l^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$ と表されます．ここで θ は緯度を指定する座標で，経線に沿って北極を 0, 南極を π としています．また ϕ は経度を指定する座標で，緯線に沿って $[0, 2\pi)$ を範囲にとります．この座標系で経線の接ベクトル $V^\mu = \partial x^\mu / \partial\theta$ は，測地線方程式 (2) を満たすことが直ちに確認できます．また，隣り合う経線のヤコビ場は $\eta^\mu = \partial x^\mu / \partial\phi$, リーマン曲率は $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = (1/l^2)(\delta^\mu{}_\alpha g_{\nu\beta} - \delta^\mu{}_\beta g_{\nu\alpha})$ となることから，測地線偏差の式 (11) は，$a^\mu = -\eta^\mu$ となり，測地線である経線が北極から出発し赤道を越えて南極へ向かうにつれ，一定の加速度で互いに近づいて行く様子がわかりますし，$\|\eta\|^2 = g(\eta, \eta) = l^2 \sin^2\theta$ ですから，北極 $\theta = 0$ と南極 $\theta = \pi$ ではヤコビ場がゼロとなっています（図 3）．経線（測地線）が共役点の組（N と S）を持つので，出発点の N と点 R とを結ぶときには，途中にその共役点 S を含む東経 135 度線を延長した測地線はもはや (B) の性質を満たさないことが分かります．

ローレンツ符号の場合でも，幾何学的にはリーマン曲率が非自明で，物理的には自由粒子に潮汐力が働くと，その粒子の測地線が共役点の組を持ち得ることが分かります．そして，2 点 p, r を測地線 $\gamma_0(t)$ で結ぶとき，その 2 点の間に p に対する共役点 q が存在するときには，$\gamma_0(t)$ は，p, r を結ぶ最長曲線ではないことが分かります（図 2(b)）．具体的には，(5) 式で定義した弧長 $L(\gamma)$ の 2 次変分 $\partial^2 L / \partial s^2$ を考えることで証明できます[4]．結局，**直線は共役点の組をその上に持てない**[*4] ことが分かります．

6. 特異点定理

さて，ここまで主に特徴 (A), (B) に着目してきましたが，前節で考えた共役点の概念を用いると，完備性 (C) についても制限が付きます．もし因果的測地線が完備でないとすると，対応する粒子や観測者は有限の寿命しか持たないことになります．これは時空が**特異点**を持っているためと解釈できます．つまり粒子や観測者が特異点に行き着いてしまったがために，その世界線が有限時間で終わったと考えるのです．実際に，膨張宇宙やブラックホールを表す時空モデルでは，それに沿って有限の固有時間でリーマン曲率が発散するような因果的測地線を持つことが確認できます．時空特異点を曲率の発散するところと定義するのは物理的に妥当ですが，それを確認するにはアインシュタイン方程式を解く必要があり，どのような状況で特異点が発生するのかを一般的に議論するのには向いていません．そこで，端点を持たないにも関わらず弧長助変数が無限に伸ばせない，**不完備な因果的測地線**の存在をもって時空に特異点が存在すると考えることにします．そのような特異点の定義の下，1960 年代から 1970 年代初頭にかけて，ペンローズ（R. Penrose）とホーキング（S.W. Hawking）は，一般にどのような条件の下で時空が特異点を持つのかを考え，特異点定理[4]（Singularity theorems）としてまとめました．

定理 3.

時空が次の条件を満たすとき，不完備な時間的または光的測地線が存在する．

1.　大域構造についての条件.
2.　強い重力場の条件.
3.　因果的測地線の収束条件.

これらの条件の詳細は，考えたい状況に合わせて強くしたり弱めたりして様々な種類の特異点定理があります．例えば宇宙論の文脈では**ビッグバンの数学的証明**[4] とも呼べる定理になっています．以下では，これら 3 つに分類される特異点の発生条件の内容と証明の基本アイディアを概観します．

まず，「1. 大域構造についての条件」というのは，因果律の仮定または**大域的双曲性**（Global hyperbolicity）という性質を要求します．前者は「時間順序が保たれている」という条件で，後者はそれに加えて時空が因果的に凸であるという，いわば因果律の仮定を最も強くしたような条件です．逆三角不等式が示唆するよう

*4）　ただし，共役点を持たない測地線が必ず直線になるとも限りません．多様体の大域的な性質にも依存します．

に，ローレンツ多様体内部の 2 点に対する距離関数には一般に上限があるとは限りませんが，大域的双曲性がある場合は距離関数が上に有界となり，特に 2 点を結ぶ最大長の測地線の存在を保証するという意味で，ホップ・リノウの定理をローレンツ多様体に一般化するのに役立つ概念です．もともとは物理法則が**初期値問題として適切**なものになることを保証するものです．

次に「2. 強い重力場の条件」の幾何学的な意味は，ある有界な（非時間的）閉部分領域 S からの光線束が（完備性の仮定の下）いずれ収束し，S に対する**大域的な光円錐**（horismos）$E(S)$ がコンパクト集合になることです．そのような閉部分領域 S として，例えば重力崩壊やブラックホール時空の文脈では**捕捉面**（closed trapped surface）という閉じた 2 次元面を，ビッグバン膨張宇宙の文脈では，膨張（過去向きに収縮）している 3 次元空間的超曲面や現在のビッグバン残光を観測している我々を表す事象としての "点" を考えます．

「3. 収束条件」というのは，任意の因果的測地線束が共役点の組をもつことを保証する条件であり，物理的には重力が引力として働くことを表すものです．因果的測地線の接ベクトル V^μ に対して $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geqslant 0$ などと表されますが，アインシュタイン方程式を使うと，物質のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ に対する条件になるので，しばしば**エネルギー条件**と呼ばれます．通常物質の分布があれば万有引力が働くのは分かりますが，真空の場合にも測地線束がやがて収束して共役点が発生することを保証するのが**一般条件**（generic condition）です．例えば時間的一般条件は「すべての時間的測地線が，その接ベクトル V^μ に対して

$$R_{\alpha\mu\beta\nu}V^\mu V^\nu \neq 0$$

を満たす点を必ず含む」になります．座標系を $V^\mu = (1,0,0,0)$ となるように選べば，$R_{i0j0} \neq 0$ になりますから，この条件は測地線偏差の式 (11) の右辺に現れた「潮汐力がゼロではない」点が測地線の上のどこかにあるということを意味します．これにより，たとえ時空が空っぽでも自由粒子の集団が潮汐力の影響を受けるのであれば，必ず測地線束が収束して共役点を持つ（もしそこまで固有時間が延びるのであれば）ということが示せます．

特異点定理の証明の要は，測地的完備性 (C) の前提の下で，**端点をもたない時間的な直線の存在**を示すところです．真っ直ぐという (A) の測地線であるだけでなく，任意の 2 点間の距離（時間間隔）を最大にするという (B) の意味での大域的な直線の存在です．

まず，強い重力場の条件の帰結である "閉じた大域的な光円錐" $E(S)$ をもとにして，大域的双曲性をもつ時空の部分領域 N を構成し，その内部に端点を持たない時間的曲線 λ が必ず含まれることを示します．もし N が時空全体であれば λ は無限の過去から無限の未来へと向かう適当な時間的曲線です．もし N が時空 M の真部分領域であれば，光的測地線で生成される N の境界面（コーシー地平面）が現れますが，このコーシー地平面は 3 の収束条件の下では有界閉集合にはなれないことが示せるため，結局，N は端点を持たない時間的曲線 λ を含まざるを得ないことが分かります．

ここで N の大域的双曲性が肝心となるのは「時間的に離れた 2 点を結ぶ時間的曲線の長さに最大値が存在する」ことが保証されるためです．これは N の内部で (i) 因果的に離れた 2 点 $p, q \in N$ を結ぶ因果的曲線の集合 $C(p,q)$ がコンパクトであること，(ii) 曲線の弧長が $C(p,q)$ 上で上半連続な関数となること，そして (iii) コンパクト空間の上半連続関数には最大値が存在することから直ちに分かります．

今，λ 上に点列の組 (x_n, y_n)，$x_n < y_n$ を考え，$n \to \infty$ で x_n, y_n は λ 上をそれぞれ過去と未来へ向かうものとします．すると上で述べた大域的双曲性の性質を利用して各 (x_n, y_n) を結ぶ時間的曲線のうちで最大の長さを実現する時間的測地線 γ_n を必ず見つけることができます．このように構成した $\{\gamma_n\}$ の極限曲線はもとの曲線 λ が端点を持たないことから，やはり端点を持たない因果的測地線 γ となり，しかもその構成方法からその上の任意の 2 点を最大長に結ぶ測地線，すなわち "直線" となります（図 4）．

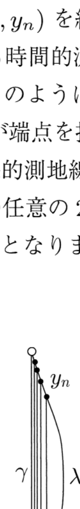


図 4　端点のない時間的曲線 λ と点列の組 (x_n, y_n) を結ぶ最大長の時間的測地線列 $\{\gamma_n\}$，およびその極限測地線 γ．

ところが3の収束条件の下では，どんな因果的測地線も共役点の組をもちます．これは“直線がその上に共役点の組をもたない”ことと矛盾します．従って背理法により「測地的完備」という前提 (C) が間違っていたと結論できるわけです．

7. 分解定理

特異点定理の条件のうち，測地線束の収束に関する一般条件は“どれだけ一般的なのか？”という問いを考察します．まず正定値計量のリーマン多様体に対するチーガー（J. Cheeger）とグロモール（D. Gromoll）による分解定理（Splitting theorem）[5]を述べておきます．

定理 4.
完備で非負のリッチ曲率をもつ正定値計量のリーマン多様体 (M, g) が直線 γ を含むと，(M, g) はリーマン直積 $M = \mathbf{R} \times H$ に分解できる．

証明の大まかな骨子は，直線 γ の存在を利用してブーゼマン（Busemann）関数と呼ばれる劣調和関数を構成します．次に，その勾配が一定のノルム（つまり一定の速度）をもつキリング・ベクトル場（Killing field）となることを示します．その積分曲線を $\mathbf{R}$ にとると，それを法線とするレベル面 H が全測地的になります[*5]．

この分解定理は，J.-H. Eschenburg[6]や G. Galloway[7]らにより，時空を記述するローレンツ符号のリーマン多様体 (M, g) へ一般化されました．

定理 5.
連結なローレンツ多様体 (M, g) が大域的双曲性をもち，時間的測地線について完備であり，さらに任意の時間的ベクトル V^μ に対して $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geqslant 0$ を満たすものとする．もし (M, g) が時間的直線 γ を持つと，(M, g) は，γ で表される $(\mathbf{R}, -\mathrm{d}t^2)$ と完備な正定値計量のリーマン多様体 (H, h) との直積 $(\mathbf{R} \times H,\ -\mathrm{d}t^2 + h)$ に分解できる．

ローレンツ多様体がこのように直積で表されるということは，その時空がきわめて特殊なものであり，物理的にはその直線に沿った世界線をもつ観測者は重力を感じないことを意味します．

分解定理から主張できることは，時空は特異点定理に従って特異点をもつか，さもなくば直積に分解されるとても特殊な時空にならざるを得ない，ということです．定理のある条件を弱めたり成り立たない場合を考え，その状況が特殊であることを示すことで結果的に定理の主張がより強固になるとき，その定理が剛性をもつといいます．ローレンツ多様体の分解定理は，いわば**特異点定理の剛性**（Rigid singularity theorem）を示すものといえます．

8. 結びに

重力の効果により (A) の意味での測地線が (B) の意味での直線でなくなるとともに，しばしば完備性 (C) も失うという特異点定理を概観しました．直線が存在しないからといっていつでも特異とは限りませんが，一方で，直線が存在する完備な時空は，分解定理により幾何学的に特殊であり，結局，特異点の発生機構が剛性を持つこともわかりました．こうした幾何学における直線の特徴と重力の本質である潮汐力との関係に由来する結論が，計量や曲率テンソルを具体的に計算して求めなくても，アインシュタイン方程式や測地線偏差の式のもつ内包的性質[1]を用いて一般的に導けるところが，重力についての洞察と幾何学的発想とが見事に結びついた成果といえるでしょう．

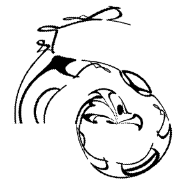
参考文献

1) 谷村省吾：『理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何』（サイエンス社，2006 年 12 月）．
2) 白水徹也：『アインシュタイン方程式』（サイエンス社，2012 年 5 月）．
3) 佐藤文隆，小玉英雄：『一般相対性理論』（岩波書店，1992）．
4) S.W. Hawking and G.F.R. Ellis: “The Large Scale Structure of Space-time” Cambridge University Press (1973).
5) J. Cheeger and D. Gromoll, *J. Differential Geometry* **6** (1971), 119–128.
6) J.-H. Eschenburg, *J. Differential Geometry* **27** (1988), 477–491.
7) G.J. Galloway, *J. Differential Geometry* **29** (1989), 373–387.

（いしばし・あきひろ，近畿大学理工学部）

*5） 超曲面 H が M の中で全測地的とは，(H, h) の任意の測地線が (M, g) の中でも測地線になっていることです．

宇宙論からみた重力



向山　信治

1. はじめに

物理学の最前線は様々なスケールに存在しますが，その中でも最大スケールの物理が宇宙論です．宇宙はどうやって始まったのか？ 宇宙は何でできているのか？ その運命は？ その基礎法則は何か？ 我々はどうして存在するのか？ このような最も素朴で大切な問題に，物理法則と観測データを使って挑む学問です．

宇宙論は，精密な観測データを背景に，飛躍的に発展し続けています．今や，宇宙を記述するパラメータの多くはかなりの精度で決まった，少なくとも決まりつつあると言えるでしょう．しかし，それらのパラメータの値が何を意味するのか，その多くは未だベールに包まれたままです．現在の宇宙は，ダークエネルギーとダークマターと呼ばれる未知の成分によって満たされていると考えられています．また，生まれたばかりの宇宙は，インフレーションと呼ばれる急激な膨張によって，巨視的な大きさに引き伸ばされたと考えられています．しかし，ダークエネルギーとダークマターの正体は何なのか？ 何がインフレーションを引き起こしたのか？ それらは何も分かっていません．ダークエネルギー・ダークマター・インフレーションは，最新宇宙論における3大謎と言えるでしょう．

本稿では，これら宇宙の3つの大きな謎を主な題材としながら，宇宙論からみた重力について解説していきたいと思います．

2. 重力と宇宙膨張，構造形成

宇宙の膨張は，紛れもない観測事実です．実際，遠くの銀河を観測すると，近くの銀河よりも赤く見えます．これは，遠ざかる車の音が低く聞こえるのと同じ原理（ドップラー効果）で，銀河が宇宙膨張によって私たちから遠ざかっていることを示しています．

理論的には，宇宙が静的ではあり得ないこと，そして膨張または収縮するはずであることは，重力が逆二乗則に従う引力であることから理解できます．次節で一般相対性理論に基づく議論をしますが，まずは簡単のため，ニュートン力学の範囲で考察しましょう．宇宙のモデルとして，密度一定で球対称なガスのかたまりを考えることにします．すると，単位質量あたりのエネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{G_{\rm N}M}{r} = E \qquad (1)$$

となります．ここで，r はガスのかたまりの半径，M は全質量，E は単位質量当たりのエネルギー，$G_{\rm N}$ は重力定数です．左辺第二項はポテンシャル・エネルギーですが，これは極値を持ちません．したがって，静的な宇宙は許されないということになります．

実は，銀河や銀河団などの宇宙の豊かな構造ができたのも，重力が逆二乗則に従う引力であるおかげです．大きさが L 程度の領域に摂動を与え，密度が周囲の平均値 ρ よりも $\delta\rho\ (>0)$ だけ高く

なったとしましょう．そうすると，その領域には大雑把に言って，単位体積当たり $G_{\rm N}M\delta\rho/L^2$ 程度の重力が余分に内向きに働くことになります．ここで，$M \sim L^3\rho$ は領域の全質量です．同時に，密度の上昇により，この領域には圧力勾配が生じ，外向きに $c_s^2\delta\rho/L$ 程度の力が働きます．ここで，$c_s = \sqrt{\delta P/\delta\rho}$ は音速です．重力が圧力勾配に打ち勝つ条件は，

$$\frac{G_{\rm N}M\delta\rho/L^2}{c_s^2\delta\rho/L} \sim \frac{G_{\rm N}\rho L^2}{c_s^2} \gtrsim 1 \tag{2}$$

となります．重要なことは，この条件がいったん満たされると，系は収縮して密度が上昇するので，音速が密度の 1/2 乗程度かそれよりも速く上昇しない限り，重力が勝ち続けるということです．系はさらに収縮し，密度は上昇し続けることになります．重力の引力的性質が引き起こすこの現象は，**ジーンズ不安定性**と呼ばれ，宇宙の構造形成に本質的な役割を果たしたと考えられています．宇宙初期の僅かな揺らぎがジーンズ不安定性によって増幅され，最終的には銀河や銀河団などの構造に発展したのです．

以上のように，宇宙が膨張し，その中で銀河等の構造が形成されてきた（そして私たち人類が生まれた）のは，元をたどれば重力のおかげなのです．

3. 重力と真空のエネルギー

一般相対性理論における基礎方程式は，アインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_{\rm N} T_{\mu\nu} \tag{3}$$

です．ここで，$G_{\mu\nu}$ は時空の計量 $g_{\mu\nu}$ から計算される幾何学量で，アインシュタイン・テンソルと呼ばれています．また，Λ は宇宙項と呼ばれる定数，$T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー運動量テンソルです．

宇宙項 Λ は，**真空のエネルギー**と解釈することができます．場の理論における真空とは，系のハミルトニアン（$\simeq$ エネルギー）を最小（または極小）にする量子状態です．一般相対性理論は，時空の曲率半径に比べて十分小さなスケールでは特殊相対性理論と同等になるように作られているので，真空がこの性質を保つと仮定すると，エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ への真空の寄与は，時空計量 $g_{\mu\nu}$ に比例することになります．したがって，アインシュタイン方程式 (3) において，真空の寄与を $T_{\mu\nu}$ に加えることは，宇宙項 Λ をずらすことと数学的に同等となります．つまり，真空のエネルギー密度（に $8\pi G_{\rm N}$ を乗じたもの）は，宇宙項と等価ということです．

物理学の多くの分野や問題において，エネルギーの値そのものには物理的意味はなく，観測可能な物理量に影響を与えるのはエネルギーの差や変化量です．しかし，一般相対性理論では，全エネルギー運動量テンソルが重力の源となるため，エネルギーの差だけでなく値そのものが物理的意味を持ちます．真空のエネルギーも例外ではありません．

真空のエネルギーが，実際に重力源としてどのような役割を果たすかを見るために，再度，膨張宇宙を考えてみましょう．前節では，ニュートン力学に基づき，ガスのかたまりのエネルギー保存則 (1) を使いました．一般相対性理論において対応する式はフリードマン方程式と呼ばれ，アインシュタイン方程式 (3) の $\mu = \nu = 0$ 成分を，一様等方な宇宙の計量

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t)\Omega^K_{ij}dx^i dx^j \tag{4}$$

に適用して得られます．具体的には

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G_{\rm N}}{3}\rho \tag{5}$$

となります．ここで，a は宇宙の大きさを表すスケール因子，$\Omega^K_{ij}dx^i dx^j$ は曲率 K の 3 次元定曲率空間の計量，$\rho = T_{tt}$ は宇宙のエネルギー密度です．

フリードマン方程式 (5) は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + U(a) = -\frac{1}{2}K \tag{6}$$

のように，1 次元空間における非相対論的粒子のエネルギー保存則の形に書き直すことができます．ここで，ポテンシャル $U(a)$ は

$$U(a) = -\frac{a^2}{6}\left(8\pi G_{\rm N}\rho + \Lambda\right) \qquad (7)$$

で与えられます．これとガスのかたまりの式 (1) を比べ，ガスの密度を $\rho_{\rm gas} = M/(4\pi r^3/3)$ とすれば，$\Lambda = 0$ の場合には，

$$a \longleftrightarrow r, \quad K \longleftrightarrow -2E, \quad \rho \longleftrightarrow \rho_{\rm gas} \quad (8)$$

という対応に気がつくと思います．ただし，フリードマン方程式には，ニュートン力学にはなかった，新たな項があります．それは宇宙項 Λ, すなわち真空のエネルギー密度です．

宇宙のエネルギー密度 ρ は様々な成分によって構成されていて，

$$\rho = \rho_{\rm nr} + \rho_{\rm r} + \cdots, \quad \rho_{\rm nr} \propto \frac{1}{a^3}, \quad \rho_{\rm r} \propto \frac{1}{a^4}, \quad \cdots \qquad (9)$$

のように各成分が異なる振舞いをします．ここで，$\rho_{\rm nr}$ は非相対論的な物質（通常のガス等），$\rho_{\rm r}$ は相対論的な物質（輻射やニュートリノ等）のエネルギー密度を表します．また，真空のエネルギー密度は宇宙項に含めることにして，ここでは ρ への寄与からは外しています．これらの振舞いは，各成分 i $(i = {\rm nr}, {\rm r}, \cdots)$ のエネルギー密度 ρ_i と圧力 P_i が満たす関係式（状態方程式）

$$P_{\rm nr} = 0, \quad P_{\rm r} = \frac{\rho_{\rm r}}{3} \qquad (10)$$

を，連続の方程式

$$\frac{d\rho_i}{dt} + 3H(\rho_i + P_i) = 0 \qquad (11)$$

に代入すれば得られます．連続の方程式は，体積 $V \propto a^3$ を導入すれば

$$d(\rho V) = -PdV \qquad (12)$$

と書けるので，エネルギーの変化と外部から得た仕事量の釣り合いの式と解釈することもできます．

ここで，真空のエネルギー密度（の $8\pi G_{\rm N}$ 倍）を宇宙項に含めた上で，フリードマン方程式において $\Lambda > 0$ としてみましょう．つまり，真空のエネルギーが正と想定しましょう．エネルギー密度 ρ に通常のガスや輻射の寄与を考えると，(7) で定義されたポテンシャル $U(a)$ の大雑把な振舞いは図 1 のようになります．この図から，任意の K に対して，（ある程度大きな a から始めれば）宇宙は膨張し続けることが分かります．そして，まるで粒子がポテンシャルを転げ落ちるように，宇宙の膨張は加速されていくことになります．

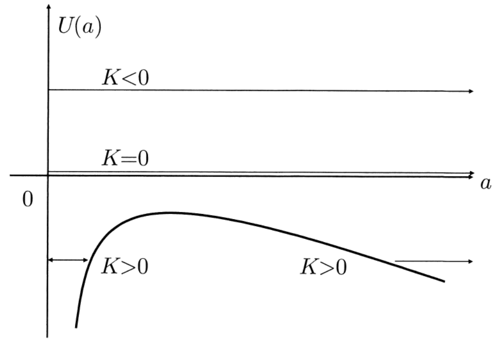


図 1　$\Lambda > 0$ の場合の $U(a)$ の振舞い．

実際，a が大きくなるにつれて，ポテンシャルは $-\Lambda a^2/6$ に支配されるようになり，系の振舞いは K や ρ にはほとんど依存しなくなります．そこで，$K = \rho = 0$, $\Lambda > 0$ の場合にフリードマン方程式 (5) を解いてみると，$a \propto \exp(\sqrt{\Lambda/3}\,t)$ のように，指数関数的膨張解が得られます*1)．

4. インフレーション宇宙

前節で示したように，真空のエネルギーは，宇宙の指数関数的な膨張を導きます．真空のエネルギーが正で十分大きければ，生まれたばかりのミクロの宇宙を巨視的な大きさに引き伸ばすことができるでしょう．もしかすると，これが，宇宙がこれだけ大きい理由なのかもしれません．

しかし，指数関数的膨張が続くだけでは，ρ はどんどん小さくなり，宇宙は空っぽになってしまいます．それでは，様々な豊かな構造を育んできた，私たちの宇宙を記述することはできません．そこで，急激な指数関数的膨張を何らかの方法で終了させる必要があります．しかも，現在観測可能な

*1)　もう一つ，$a \propto \exp(-\sqrt{\Lambda/3}\,t)$ という解もありますが，これは宇宙の収縮を表す解になっています．

領域全体で，ほぼ同時に終わらせる必要があります．なぜなら，そうでないと，その後の宇宙が非一様になってしまい，観測と矛盾してしまうからです．しかし，相対性理論は遠隔相互作用を禁止しています．異なる2点間の相互作用は，場（各点で数を記録するもの）を介して初めて可能になります．したがって，初期宇宙の指数関数的膨張によって私たちの宇宙の大きさを説明するには，場の導入が必要です．

ここでは，最も簡単なものとして，スカラー場（各点で1つの数を記録する場）を考えましょう．言うまでもなく，各点でスカラー場が記録している数は，指数関数的膨張を終了するまでに残っている時間です．このような，終了させるメカニズムが備わった指数関数的膨張を，宇宙の**インフレーション**と言います[1)]．そして，インフレーション終了までの時間を記録するスカラー場は，**インフラトン**と呼ばれています[2)]．インフラトンがある値に到達すると，インフレーションが終了します．それまで蓄えられていた真空のエネルギーは解放され，宇宙が再加熱されます．その瞬間，熱い火の玉宇宙が始まるのです．

このように，インフレーションによる指数関数的膨張は，宇宙がなぜこれだけ大きいのかを説明してくれます．それだけでなく，以下で説明するように，インフレーションは，宇宙の構造の種となる非一様性も生成します．

初期宇宙では，急速な宇宙膨張に伴い，量子効果が顕著になります．インフラトンも，量子揺らぎによって少し前に進んだり，少し後ろに戻ったりするでしょう．ある領域でインフラトンが周辺より少し前に進むと，インフレーション終了までの時間が短くなり，その領域ではインフレーションが早く終わることになります．インフレーション後，熱い火の玉宇宙を満たす輻射のエネルギー密度は，(9) に従って薄まっていきます．インフレーションが早く終わるということは，早く薄まり始めるということであり，結局，その領域のエネルギー密度は周辺より低くなります．逆に，量子揺らぎによりインフラトンが後ろに戻ると，その領域のエネルギー密度は周辺より高くなります．このようにして，エネルギー密度の低い領域と高い領域が作られることになります．

さらに，このような揺らぎの生成は，インフレーション中，ずっと続きます．それぞれの揺らぎは，揺らぎが作られたときにはミクロなスケールですが，指数関数的膨張により巨視的なスケールに引き伸ばされます．作られた時期によって引き伸ばされる度合いが異なるので，最終的には様々なスケールの揺らぎが重ね合わされることになります．

このようにして生成された非一様性は，ジーンズ不安定性（第2節参照）により増幅され，銀河や銀河団などの宇宙の豊かな構造へと成長していったと考えられています．

インフレーションが予言する揺らぎのスペクトルは，宇宙背景輻射の温度揺らぎの観測データを見事に説明します．インフレーションは理論として美しいだけでなく，観測にも支持されているのです．このことから，多くの研究者は，インフレーションが初期宇宙で実際に起こったのではないかと考えています．しかし，インフレーションを起こした真空のエネルギーは何によるものなのか？ そしてインフラトンの正体は何なのか？ それはまだ分かっていません．生まれたばかりの宇宙で何が起こったのかを知るには，観測面と理論面の両方で，さらなる研究が必要です．

5. 宇宙の始まりと量子重力

インフレーション宇宙についての話をすると，「インフレーションはビッグバンの前ですか？ 後ですか？」という質問をされることがあります．そういうとき私は，「それはビッグバンの定義によります」と前置きすることにしています．その上で，まずは，「過去に遡ると，宇宙は高温・高密度になります．この熱い火の玉宇宙の始まりをビッグバンと呼ぶのであれば，それはインフレーション終了時の再加熱と考えることができ，したがって，インフレーションはビッグバンの前ということになります」と答えています．そして，「アインシュ

タインの一般相対性理論において，宇宙は時空として幾何学的に記述されます．しかし，際限なく時間をさかのぼると，ついには時空の歪みがあまりにも強くなり，一般相対性理論も破綻してしまいます．これは時空の特異点の一種ですが，このときをビッグバンと呼ぶのであれば，インフレーションはビッグバンの後となります」と加えるのです．前者は宇宙の熱史，後者は宇宙の幾何に着目した定義と言えるでしょう．

後者の意味でのビッグバン，すなわち時空の特異点では，量子揺らぎと重力の強さの両方が非常に大きくなり，一般相対性理論と量子論が破綻してしまいます．したがって，真に宇宙創生を論ずるには，この理論的破綻を回避して重力と量子論とを調和させる，**量子重力理論**が必要です．

しかし，量子重力理論の構築は簡単ではありません．実際，アインシュタインの相対性理論は，そのままでは量子論と相容れないと考えられています．その最大の理由の一つは，相対性理論が繰り込み可能でないことです．したがって，高エネルギーで，相対性理論か量子論のどちらか（あるいは両方）を修正する必要があります．現時点ではどちらを修正すべきか分かっていませんが，多くの研究者は，相対性理論を修正する道を選んでいます．

高エネルギーで相対性理論に代わって重力を記述すると考えられている候補理論は多くありますが，その中でも最も有力な候補は，超弦理論でしょう[3]．その考え方は，弦の様々な振動によって宇宙のすべてを記述しようという，シンプルかつ野心的なものです．そのため，量子重力を含む究極の理論の最有力候補と考えられています．

しかし，量子重力理論の候補は超弦理論だけではありません．例えば，2009年にHořava によって提唱された重力理論（Hořava–Lifshitz 理論）は，高エネルギーでローレンツ対称性を破ることで，繰り込み可能性を実現すると考えられています[4)*2)]．もしもこのような理論が正しければ，全く新しい宇宙シナリオが可能になるでしょう[5)]．

*2） 最近では，Hořava–Lifshitz 理論を超弦理論の枠内で実現しようという試みも始まっています．

6. 宇宙の暗黒成分か？ 新しい重力理論か？

現在の宇宙は謎の物質とエネルギーに満たされているらしい…．驚くかもしれませんが，これはSF の話ではなく，精密な観測データに基づく最新の宇宙像です．宇宙背景輻射と呼ばれる初期宇宙の残光や，重い星が一生を終える際の大爆発である超新星の観測から，現在の宇宙の膨張は加速していることが分かってきました．これをアインシュタインの一般相対性理論を使って説明するには，万有斥力を生み出すような，負の圧力を持ったエネルギーの存在を仮定する必要があります．また，銀河が自転による遠心力によってばらばらになってしまわないためには，目には見えない物質が存在し，その重力によって銀河を構成する星々を引き留めておかなければなりません．しかも，現在の宇宙の 9 割以上がこの謎のエネルギーと物質で占められていなければ，観測結果を説明することができないのです．これらの謎の成分はそれぞれ**ダークエネルギー**，**ダークマター**と呼ばれていますが，その正体は全く分かっていないのが現状です．

ダークエネルギーは，それが宇宙の加速膨張の原因だとすると，現在の宇宙の 7 割以上を占めていると考えられます．その性質を特徴づける量としては，状態方程式と呼ばれる

$$w \equiv \frac{P_{\rm de}}{\rho_{\rm de}} \tag{13}$$

が有用です．簡単のため w を定数とすると，連続の方程式 (11) により，

$$\rho_{\rm de} \propto a^{-3(1+w)} \tag{14}$$

と振る舞うことがわかります（例として，(9) と (10) を参照のこと）．Planck グループの宇宙背景輻射の観測によると，68%の確からしさで

$$w = -1.13^{+0.13}_{-0.10} \tag{15}$$

となっています[6)]．一方，宇宙項 Λ は時間に依存

しない $\rho_{\rm de}$ と等価であり，(14) により $w=-1$ に対応します．この値は観測による制限 (15) を満たしており，したがって，少なくとも観測的には，宇宙項をダークエネルギーの候補と見なすことが可能です．しかし，理論的には，宇宙項は真空のエネルギーと等価であり，真空のエネルギーを第一原理から計算しようとすると，観測から示唆される値よりも何と 120 桁も大きく出てしまいます．これは**宇宙項問題**と言われ，理論物理学における最難問の一つと考えられています．

各成分のエネルギー密度の振舞い (9) から，非相対論的な物質のエネルギー（エネルギー密度に体積 $\propto a^3$ を乗じたもの）は一定，相対論的な物質のエネルギーは $\propto 1/a$ のように宇宙膨張とともに減少することがわかります．一方，ダークエネルギーのエネルギー密度 $\rho_{\rm de}$ はほとんど一定値のため，エネルギーとしては宇宙膨張とともに増加します．これは驚くべきことですが，(12) を見ると，ダークエネルギーが負の圧力を持つことに起因していることが分かります．つまり，体積変化による外部との仕事のやりとりが通常と逆符号のため，膨張することで逆にエネルギーを得るのです．

以上のように，最近明らかになった宇宙の加速膨張は，一般相対性理論に基づいて説明しようとすると，ダークエネルギーの存在を示唆します．ダークエネルギーは，もしも本当に存在するのであれば，負の圧力を伴うことで万有斥力を生じ，宇宙が膨張すると増加するという，驚くべき性質を持つはずです．しかし，その正体は全く分かっていないのが現状です．

歴史的には，19 世紀にこれと似た状況が知られています．惑星の軌道の精密な観測により，水星の近日点移動と呼ばれる現象が発見されましたが，ニュートンの万有引力の法則と運動方程式では説明できませんでした．そこで，人々は見えない惑星を導入して説明しようとしました．この仮説上の惑星はヴァルカンと呼ばれ，発見したと主張した人もいたそうです．しかし，本当の答えは“重力理論を変える”ということでした．アインシュタインの一般相対性理論は水星の近日点移動を見事に説明し，ニュートン力学に変わる，新しい重力理論としての地位を獲得したのです．

この歴史的事実を鑑みれば，少なからぬ研究者が「ダークエネルギーを導入する代わりに，一般相対論を変更することはできないか？」と考えるのも理解できるでしょう．ダークエネルギーは，一般相対性理論で加速膨張を説明しようとすると必要ですが，もしも重力が長距離で変更を受けるのなら，もしかすると必要ないのかもしれません．ダークエネルギーか？ 新しい重力理論か？ この論争はまだ始まったばかりです．

7. 重力子は質量を持てるか？

自然界にある 4 つの力のうち電磁力，弱い力，強い力は，それぞれ，光子，ウィークボソン，グルーオンによって媒介されます．同様に重力も，重力子によって媒介されると考えられています．一般相対性理論においては，重力子に質量はなく，その結果，重力は長距離にまで作用します．一方，もしも重力子に質量を与えることができれば，重力の長距離での振舞いが修正されるでしょう．この節では，そのような可能性について考えてみましょう．

Massive gravity，つまり重力子がゼロでない質量を持つ可能性についての研究は，1939 年に Fierz と Pauli が線形理論を提唱して以来，長い歴史を持ちます．しかし，1972 年に Boulware と Deser が非線形レベルでの不安定性を指摘してからは，長い間，単一の重力子はゼロでない質量を持てないだろうと考えられてきました．約 40 年後の 2010 年になってやっと，この不安定性の問題を解決する理論が，de Rham と Gabadadze と Tolley によって提唱されました[7]．この理論は，3 人のイニシャルをとって，dRGT 理論と呼ばれています．

理論的整合性を持つ massive gravity 理論の候補が見つかったので，多くの研究者が，それを宇宙論に応用して，加速膨張などの宇宙の謎に挑戦したいと考え始めました．なぜなら，ダークエネ

ルギーやダークマターは，一般相対性理論が正しければ必要ですが，重力の振舞いが長距離で変更を受ければ，もしかすると必要ないかもしれないからです．

私も，期待に胸を膨らませながら，共同研究者と共に massive gravity における宇宙論を研究し始めました．ところが，その結果として，massive gravity における新たな不安定性を発見してしまいました[8]．これは，前述の 1972 年に Boulware と Deser が指摘した不安定性以来の，全く新しいタイプの不安定性でした．残念なことに，これにより，dRGT 理論における一様等方な宇宙論解は，すべて不安定であることが分かってしまったのです．

そこで，この “no-go” を回避して，massive gravity における新しい宇宙論を始めるために，私たちは 2 つのアプローチをとることにしました．一つのアプローチは，新しいタイプの宇宙論解を見つけることでした．そのためには，一様性と等方性の少なくともどちらかを破る必要があります．私たちは，通常の物質からは見えないところで等方性を破ることで，新しい宇宙論解を発見しました[9]．もう一つのアプローチは，理論を拡張することです．これまで様々な拡張を試みましたが，今までのところ，3 つの拡張理論（拡張された quasidilaton 理論，bimetric 理論，回転対称な massive gravity 理論）で安定な一様等方宇宙論解をみつけることに成功しています[10]．

8. 最後に

本稿では，主に宇宙の 3 大謎についての考察を通じて，宇宙論からみた重力について解説しました．まずは，宇宙が膨張し，その中で銀河等の構造が形成されてきた（そして私たち人類が生まれた）のは，元をたどれば重力のおかげであることを知りました．そして，アインシュタインの一般相対性理論では，エネルギーの差だけでなく値そのものが物理的意味を持ち，したがって真空のエネルギーさえもが宇宙の発展に影響を与えることを見ました．それが，インフレーション宇宙というシナリオに繋がりました．インフレーション宇宙は，宇宙がこれだけ大きいのはなぜかを説明できるだけでなく，宇宙背景輻射で観測されている揺らぎの性質を見事に説明するため，多くの研究者に受け入れられています．しかし，インフラトンの正体は全く分かっていません．また，現在の宇宙のほとんどを占めていると考えられている，ダークエネルギーとダークマターも，その正体はわかっていません．最後に，ダークエネルギーを導入する代わりに，重力を長距離で変更することで観測データを説明しようという試みの一つ，massive gravity についても解説しました．

このように，最大スケールの物理である宇宙論において，重力は本質的な役割を果たします．宇宙はどうやって始まり，これからどうなるのか？私たちはどこからやってきたのか？ このような素朴で大切な疑問に科学で答えるためには，重力のより深い理解が欠かせないのです．

参考文献

1) A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980); K. Sato, *MNRAS* **195**, 467 (1981); A.H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981); A.D. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1981); A. Albrecht and P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).
2) ここでのインフラトンの解釈は，インフレーションの有効場の理論に基づいています．C. Cheung, P. Creminelli, A.L. Fitzpatrick, J. Kaplan and L. Senatore, *JHEP* **0803**, 014 (2008).
3) 超弦理論の教科書は多くありますが，ここでは代表的なものを 2 つ挙げておきます．M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, (Cambridge University Press); J. Polchinski, *String Theory*, (Cambridge University Press).
4) P. Hořava, *Phys. Rev. D* **79**, 084008 (2009).
5) S. Mukohyama, *Class. Quant. Grav.* **27**, 223101 (2010).
6) P.A.R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], arXiv: 1303.5076 [astro-ph.CO].
7) C. de Rham, G. Gabadadze and A.J. Tolley, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 231101 (2011).
8) A. De Felice, A.E. Gümrukçüoğlu and S. Mukohyama, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 171101 (2012).
9) A.E. Gümrukçüoğlu, C. Lin and S. Mukohyama, *Phys. Lett. B* **717**, 295 (2012).
10) D. Langlois, S. Mukohyama, R. Namba and A. Naruko, arXiv:1405.0358 [hep-th].

（むこうやま・しんじ，東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）

熱・統計力学からみた重力



高柳　匡

1. はじめに

熱力学はマクロな熱的な系の物理現象を記述するが，マクロな系をミクロな自由度に分解することでその起源を探ると**統計力学**にたどり着く．黒体輻射の現象から量子論が見出されたように，熱現象を正しく説明するには量子力学の考え方が必要不可欠である．

さて，アインシュタインの一般相対性理論は，プランク定数を含まないことから分かるように古典的な重力理論である．その運動方程式であるアインシュタイン方程式を解くと様々な解が存在することが分かり，それぞれが異なった時空を表す．もちろん我々が現在暮らしているような，平坦な時空（ミンコフスキー時空）もその解に含まれる．しかし一般相対性理論において実現される解の中で，とりわけ興味深い時空は，ブラックホール時空であろう．ブラックホールはとても重い球状の物体の重力解であり，その外側の観測者はその球の内部を見ることができない．つまり，あまりに強力な重力場のために光ですら強く引き付けられ，ブラックホールから光のシグナルを送っても有限時間では外の観測者まで到達できないのである．

ブラックホールの大きさは自由に選べるパラメーターであるので，十分に大きくとったとする．このとき，古典重力理論における大きなブラックホール時空解を考えていることになるので，古典論が完全に適用できるであろうと推測することは自然であろう．しかしながらブラックホールの性質を良く調べてみると，実は熱力学と同じ法則に従うことが分かる[1)]．ブラックホールはエントロピーを持ち[2)]，黒体に近い輻射（ホーキング輻射[3)]）が出ていることも示すことができ，その温度も任意に選べる．力学にたとえると，古典力学の運動方程式だけから，なぜか熱力学の法則や微視的な状態数を表すエントロピーが導出できてしまうような不思議な状況である．

この奇妙な事実は，一見古典論と思える一般相対性理論に実は量子論的な自由度が隠されていることを示唆する．もっと言うと，一般相対性理論のような重力理論（代表例は超重力理論）は，何らかの量子多体系と実は等価なのではないのか？という予想も生まれる．これを具体的に表した考え方が**ホログラフィー原理**であり[4)]，特に最も良く調べられている例が**AdS/CFT対応**である[5)]．このような考え方は，超弦理論の分野で今や全く標準となってきており，重力理論の物理的解釈や役割も大きく変わってきていると言える．以下ではそのような流れを説明したいと思う．

2. ブラックホールと熱力学

4次元時空（空間3次元と時間1次元）の一般相対性理論を考えよう．ある領域内に物質を球対称に詰めてゆくと（全質量を M とする），その半径がシュワルツシルド半径

$$r_{\rm H} = 2G_{\rm N}M \quad (G_{\rm N}\text{は重力定数}) \tag{1}$$

より小さくなると重力崩壊と呼ばれる現象を起こし,

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_{\rm H}}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r_{\rm H}}{r}} + r^2 d\Omega^2 \tag{2}$$

の計量で与えられるシュワルツシルド・ブラックホールになる.ここで $d\Omega^2$ は 2 次元球面の極座標である.$r = r_{\rm H}$ を事象の地平線という.

重い物体がいったんブラックホールに崩壊してしまうと,とても強い重力場を作るため,物質や光はその内部から外に出てくることは不可能になることが計量 (2) から分かる.しかしながらホーキングは,量子効果をとり入れるとブラックホールはある温度 $T_{\rm H}$ の黒体とみなせ,実際には輻射光が外に出てくることを示した (ホーキング輻射)[3].

さて,ブラックホールの温度 $T_{\rm H}$ を計算するには,まず地平線近傍で計量が

$$ds^2 \simeq -\left(\frac{r-r_{\rm H}}{r_{\rm H}}\right)dt^2 + \left(\frac{r_{\rm H}}{r-r_{\rm H}}\right)dr^2 + r_{\rm H}^2 d\Omega^2 \tag{3}$$

と近似できることに着目する.半径方向の座標を $\xi = 2\sqrt{r_{\rm H}(r-r_{\rm H})}$ と再定義すると計量は

$$ds^2 = -\frac{\xi^2}{4r_{\rm H}^2}dt^2 + d\xi^2 + r_{\rm H}^2 d\Omega^2 \tag{4}$$

と書ける.有限温度理論を考えるときにするように,時間をユークリッド化,すなわち $t_{\rm E} = it$ とすると,$(t_{\rm E}, \xi)$ で張られるユークリッド空間が極座標で表された平坦な 2 次元平面で与えられることが分かる.このとき $\xi = 0$ で特異点を持たないという要請から,t_E は $4\pi r_{\rm H}$ の周期を持たないといけないことがすぐに分かる.ユークリッド時間の周期は温度の逆数に比例するので,結果としてブラックホールの温度は

$$T_{\rm H} = \frac{1}{8\pi G_{\rm N}M} \tag{5}$$

と求まるのである.ユークリッド時間 $t_{\rm E}$ の周期が温度の逆数 $\beta = 1/T_{\rm H}$ となることは,カノニカル分布の分配関数

$$Z = {\rm Tr}[e^{-\beta H}] \tag{6}$$

(H は系のハミルトニアン) を経路積分で計算することを考えるとすぐに分かる.トレースをとるので時間方向に $t_{\rm E} \sim t_{\rm E} + \beta$ の周期性を課すことになるのである.

このようにブラックホールは温度を持つが,さらに興味深いことにブラックホールは熱力学に従うことが分かる[1].ブラックホールの熱力学第一法則は,通常の熱力学のように,エネルギーの変化はエントロピーの変化に温度を掛けたものに等しいという関係である.ブラックホールのエネルギーはその質量と同じなので,ブラックホールの熱力学第一法則は,

$$T_{\rm H}dS = dM \tag{7}$$

と表される.従って,エントロピーは,

$$S = 4\pi G_{\rm N} M^2 \tag{8}$$

と計算される.ブラックホールの地平線の面積 $A_{\rm H} = 4\pi r_{\rm H}^2$ を用いて書き直すと,

$$S = \frac{A_{\rm H}}{4G_{\rm N}} \tag{9}$$

の関係を得る.これは,**ベッケンシュタイン・ホーキング公式**としてよく知られ[2,3],**面積則**とも呼ばれる.この公式 (9) は,時空の次元や地平線の形などによらず普遍的に成立する.

また,熱力学の第二法則に相当する性質として,地平線の面積は物理過程 (例えば 2 つのブラックホールの合体など) で必ず増えるということも証明できる.ただし,ブラックホールの外側に熱力学に従う物質が存在する場合は,その物質の熱力学的量とブラックホールの熱力学的量を足し合わせたものが,熱力学の法則に従う (一般化されたブラックホールの熱力学と呼ばれる).

3. ホログラフィー原理

以上のように,ブラックホールが有限のエントロピーを持ち,熱力学の法則に従う,という興味

深い事実が明らかになったが，もともと古典論である一般相対性理論が一体なぜ，このような性質を持ち得るのであろうか？

そこで重い星が重力崩壊してブラックホールを生み出す過程を考えよう．いったんブラックホールが形成されると外の観測者はその中身を観測することはできない．この場合に，外部の観測者からすると，星内部の情報（例えば，電荷やスピン）をあるときから知ることができなくなる．従って，ブラックホール内部に隠された情報が存在することになる．これをブラックホールのエントロピーと解釈するのが自然であろう．

ここで量子力学の用語の復習を少ししておこう．量子力学において，ある量子状態 $|\psi\rangle$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の元（状態ベクトル）として表される．その状態がシュレディンガー方程式に従って発展し，量子力学の時間発展を記述する．さてこのように一つの状態ベクトル $|\psi\rangle$ で与えられる状態を**純粋状態**と呼ぶ．一方，より一般には熱力学的状態のように，ある確率分布で複数の量子状態が出現するような状況を考えることが便利な場合がある．このような状態は**混合状態**と呼ばれ，密度行列 ρ で状態が記述される．カノニカル分布の場合は，$\rho=\frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}[e^{-\beta H}]}$ である．量子力学では，物理量は対応する演算子（O と書く）の期待値（$\langle O\rangle$ と書く）で与えられるが，純粋状態と混合状態ではそれぞれ

$$\begin{aligned}&\text{純粋状態}:\ \langle O\rangle=\langle\psi|O|\psi\rangle,\\&\text{混合状態}:\ \langle O\rangle=\mathrm{Tr}[\rho\cdot O]\end{aligned}\tag{10}$$

と計算することができる．混合状態は特別な場合として純粋状態を含み，具体的には $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$ と置けばよい．混合状態では複数の量子状態が出現するので，どれが生じるのかというあいまいさが生じる．逆に見ると，実現された状態が測定されたときにどれだけの情報が得られるのかという情報量を持っていると言える．この情報量を定量化したものが**フォンノイマン・エントロピー**であり，

$$S=-\mathrm{Tr}[\rho_{\mathrm{H}}\log\rho_{\mathrm{H}}]\tag{11}$$

で与えられる．純粋状態では一つの状態しか存在しないので，当然フォンノイマン・エントロピーはゼロ $S=0$ である．

さてブラックホールの話に戻ろう．ブラックホールの中身が外から見えないということは，外部の観測者からすると，内部の状態に関して推測するといろいろな可能性（不確定性）が生じ，ある密度行列 ρ_{H} で記述される混合状態として観測されることになる．従って，フォンノイマン・エントロピー S が生じることになり，それが面積則 (9) のブラックホール・エントロピーで与えられるというわけである．

しかし，ブラックホールが熱力学に従うとすると不思議なことがある．我々が教科書で学ぶように熱力学ではエントロピーやエネルギーといった示量的な物理量は系の体積に比例する．一方，ブラックホールでは面積則 (9) が示すようにエントロピーは面積に比例する．もしかするとブラックホールの熱力学が何か例外的なものであるかのように思うかもしれない．しかし後述するように決してそうではなく，実は，重力理論の基本的な性質を表しているに過ぎないのである．

そこで，重力理論における自由度の振舞いについて理解するためにある空間領域にどれだけの物質を詰め込めるのか考えてみる．ブラックホールが物質を詰め込む際の限界に相当するという事実と面積則 (9) から，一般相対論においては，ある領域内に含まれるエントロピーの最大値 S_{Max} はその領域の表面積に比例する，という性質

$$S_{\mathrm{Max}}\leq\frac{\text{領域の表面積}}{4G_{\mathrm{N}}}\tag{12}$$

が導かれる．すなわち，$(d+2)$ 次元時空の重力理論で許される自由度は，あたかも $(d+1)$ 次元の重力を含まない理論の自由度のように振る舞う．ここで $(d+1)$ 次元は，空間が d 次元，時間が1次元という意味である．つまり重力理論における自由度が重力を含まない理論の場合と本質的に異なることを意味し，極めて重要かつ基本的な性質を表している．

このように $(d+2)$ 次元のブラックホールの熱

力学を $(d+1)$ 次元の量子系の熱力学と解釈すれば，エントロピーの振舞いは上手く説明できる．ブラックホールは，重力理論の基底状態を有限温度に加熱して得られる物体と自然に考えられるので，これらのことから：「$(d+2)$ 次元の重力理論は，重力を含まない $(d+1)$ 次元の量子系と物理的に等価であるだろう」という少々大胆な推測が生まれる．このように予想される等価性は**ホログラフィー原理**と呼ばれる[4)]．典型的には，境界のある $(d+2)$ 次元時空 M における重力理論を念頭に置いており，それと等価な $(d+1)$ 次元の量子系は，その境界 ∂M 上にあると考える．

このホログラフィー原理が，どの程度の幅広いクラスの重力理論に適用できるのか？ また，どうしてホログラフィー原理が成り立つのか？という根本的な疑問は未だに明確ではない．現在のところ分かっていることは次節で説明する AdS/CFT 対応と呼ばれる等価性が，ホログラフィー原理の具体例として非常に多くの検証をパスしていることである．しかしながら，ホログラフィー原理の主張する等価性は大変画期的なもので，素粒子論から一般相対性理論，そして量子多体系の物理まで広範囲の物理を新しい観点で統一できることを示唆している．例えば，量子重力理論は一般の時空においては大変難解な理論であるが，ホログラフィー原理を用いると既知の量子多体系の計算に結び付けることが可能となる．

4. AdS/CFT 対応

さてそれではホログラフィー原理の最も確立した例である AdS/CFT を簡単に説明しよう．$(d+2)$ 次元の**反ドジッター（Anti de Sitter; AdS）空間**は，時間が 2 つある $(d+3)$ 次元時空 $\mathbf{R}^{2,d+1}$,

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{d+2}^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_{d+1}^2 \quad (13)$$

内の超曲面

$$X_0^2 + X_{d+2}^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{d+1}^2 + R^2 \quad (14)$$

として定義される．この時空を略して AdS_{d+2} と書くことにする．ここで，定数 R は，半径（空間の大きさ）を表す．

この拘束条件 (14) を解くために，$X_0, X_1, \cdots, X_{d+2}$ を以下のようにとる：

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{z}{2}\left(1 + \frac{R^2 + \vec{x}^2 - x_0^2}{z^2}\right), \\ X_i &= \frac{Rx_i}{z}, \quad (i = 1, 2, \cdots, d), \\ X_{d+1} &= \frac{z}{2}\left(1 - \frac{R^2 - \vec{x}^2 + x_0^2}{z^2}\right), \\ X_{d+2} &= \frac{Rx_0}{z}. \end{aligned} \quad (15)$$

このとき計量は次のように簡単な形になる：

$$ds^2 = R^2\left(\frac{dz^2 - dx_0^2 + \sum_{i=1}^d dx_i^2}{z^2}\right). \quad (16)$$

これを AdS 空間のポワンカレ計量と呼ぶ．

AdS_{d+2} の座標と計量をそれぞれ x^a と g_{ab} $(a, b = 0, 1, \cdots, d+1)$ と表し，リッチ曲率テンソル，スカラー曲率をそれぞれ $\mathcal{R}_{ab}$, $\mathcal{R}$ と書くと，

$$\mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0 \quad (17)$$

という真空のアインシュタイン方程式を満たす．ここで宇宙定数 Λ は，

$$\Lambda = -\frac{d(d+1)}{2R^2} < 0 \quad (18)$$

で与えられる負の定数である．AdS 空間の著しい性質は，負の曲率を持つ時空の中で，最大限の対称性を有する点である．式 (14) からすぐに分かるように，$SO(2, d+1)$ の変換で，AdS_{d+2} 空間は不変である．

ポワンカレ座標の AdS_{d+2} 計量 (16) を良く眺めてみよう．特に $z \to 0$ の極限を考えると時空が無限に膨らむことが分かる．この極限 $z = 0$ として定義された $(d+1)$ 次元時空は，反ドジッター時空の無限遠すなわち境界に相当する．今考えているポワンカレ座標では，境界はミンコフスキー時空 $\mathbf{R}^{1,d}$ となる．

さて，この AdS 空間にホログラフィー原理が適用できたと仮定すると，$(d+2)$ 次元の AdS 空間は，その境界 $z = 0$ に定義される $(d+1)$ 次元の

重力を含まない理論で等価に記述できるはずである．$(d+1)$ 次元の場の理論が持つ対称性はローレンツ対称性 $SO(1,d)$ である．従って AdS_{d+2} の対称性 $SO(2,d+1)$ は，これよりも大きくなってしまう．しかしながら，$(d+1)$ 次元の理論に共形対称性と呼ばれる性質があると仮定すると，対称性が $SO(2,d+1)$ に拡大される．この共形対称性を持つ場の理論を**共形場理論**（**Conformal Field Theory; CFT**）と呼ぶ．

大雑把に説明すると共形対称性とは長さスケールを変えても理論が不変に保たれる性質を意味する．実際に AdS 空間は次の変換

$$x_\mu \to \lambda x_\mu, \quad z \to \lambda z \tag{19}$$

で不変であり，$z=0$ に制限すると確かにスケール変換になっている．このようにして，ホログラフィー原理より「AdS_{d+2} 空間における（量子）重力理論が，その境界における $(d+1)$ 次元の共形場理論と等価である」ことが予想され，これが**AdS/CFT 対応**である（図 1 参照）．ここで，一般相対性理論が完全な古典論であるのに対して，その量子効果を取り入れた理論は量子重力理論と呼ばれ，超弦理論はその最も有力な候補である．実際に超弦理論の考察を使うとこのような AdS/CFT 対応が成り立つ具体例が多数見つかり，様々な検証がなされている．しかしながら，特に共形場理論が強く相互作用し，かつ自由度が大きな場合は，重力理論の量子効果は無視でき，一般相対性理論を用いることができることが知られている．

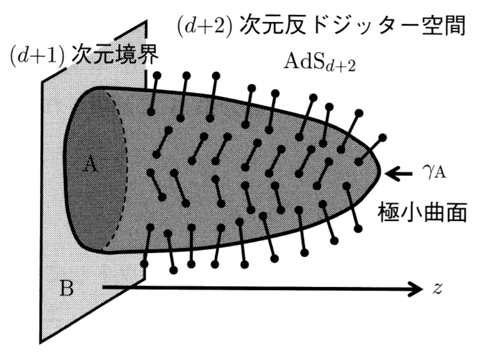


図 1　AdS/CFT の概念図とエンタングルメント・エントロピーの計算．極小曲面 γ_{A} の面積として共形場理論のエンタングルメント・エントロピー S_{A} は計算される．この事実から，γ_{A} には，そのエントロピーに比例する数だけの量子エンタングルメントが存在することになり，それらも図示している．

また (19) の変換が z にも作用していることから，AdS 空間の z 座標は，長さのスケールを表していることも理解できる．境界 $z=0$ は，その意味で長さがゼロ，つまりエネルギーが ∞ の状態（紫外極限）に相当するわけである．z が徐々に大きくなるにつれ，エネルギーが下がり，$z=\infty$ では，ゼロ（赤外極限）になる．場の理論の言葉で言うと繰りこみ群に相当し，繰りこみ点のエネルギーが E 程度の物理の情報が，$z \sim \frac{1}{E}$ の AdS のスライスに蓄積されているのである．

5. ブラックホール熱力学と量子多体系の熱力学

AdS/CFT 対応において，両者の物理量がどのように対応するのかという基本原理が，**バルク/境界関係**である．この関係式は，一言でいうと両者の分配関数が一致することを表し，以下のシンプルな式で与えられる：

$$Z_{\mathrm{AdS\ 重力}} = Z_{\mathrm{CFT}}. \tag{20}$$

ここで $Z_{\mathrm{AdS\ 重力}}$ は重力理論の分配関数であり，Z_{CFT} は共形場理論の分配関数を意味する．前者は，重力理論を古典重力（一般相対性理論）で近似できる場合を考えると

$$Z_{\mathrm{AdS\ 重力}} \simeq e^{iS_{\mathrm{AdS\ 重力}}} \tag{21}$$

と近似できる．ここで，$S_{\mathrm{AdS\ 重力}}$ は，一般相対性理論の作用（アインシュタイン・ヒルベルト作用）にアインシュタイン方程式 (17) の解を代入したものである．一方，後者の Z_{CFT} は量子論の分配関数であり古典論で近似することは通常できない．

アインシュタイン方程式の解として AdS 空間の計量を今は考えているが，より一般の解でもかまわないし，さらに物質場の寄与を取り入れてもよい．このように，より一般の時空に対しても AdS/CFT

対応は拡張され成り立つと考えられている．

その代表的な例が，AdS 空間におけるブラックホールである．特に，$(d+2)$ 次元の AdS 空間におけるシュワルツシルド・ブラックホールの計量は，

$$ds^2 = -R^2 \frac{f(z)}{z^2} dt^2 + R^2 \frac{dz^2}{z^2 f(z)} + \frac{R^2}{z^2}(dx_1^2 + \cdots + dx_d^2), \qquad (22)$$

$$f(z) = 1 - \left(\frac{z}{z_{\mathrm{H}}}\right)^{d+1}$$

で与えられる．特に $z_{\mathrm{H}} = \infty$ のときは，計量はポワンカレ座標の AdS_{d+2} と同じになる．$z = z_{\mathrm{H}}$ はブラックホールの地平線になっていることが分かり，一方境界近く $z \to 0$ では AdS_{d+2} に近づく．

ユークリッド化した空間が $z = z_{\mathrm{H}}$ で特異点を持たないことを要請すると，ユークリッド時間 $t_{\mathrm{E}} = it$ の周期 β は，

$$\beta = \frac{4\pi}{d+1} z_{\mathrm{H}} \qquad (23)$$

と決まる．従って AdS/CFT 対応を用いると，この $(d+2)$ 次元のブラックホールは同じ温度 $T = \frac{1}{\beta}$ の $(d+1)$ 次元の共形場理論に対応するのである．さらにブラックホールのエントロピー S_{BH} は，共形場理論のエントロピー S_{CFT} に等しい：

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{V_d}{4G_{\mathrm{N}}} \left(\frac{R}{z_{\mathrm{H}}}\right)^d = S_{\mathrm{CFT}}. \qquad (24)$$

ここで面積則 (9) を (22) に対して用いた．V_d は空間方向 $x_1, x_2, \cdots, x_d$ の体積を表す．この関係式より $S_{\mathrm{CFT}} \propto V_d T^d$ が分かり，確かに S_{CFT} は $(d+1)$ 次元量子系のエントロピーとして正しい振舞いをすることが確認できる．例えば S_{CFT} は示量的な熱力学量であるが，実際に体積に比例している．しかし AdS 空間の重力理論の立場でみると，S_{BH} はブラックホールの地平線の面積に比例しているのである．このよう一見相容れないと思われた熱力学と面積則の関係が，AdS/CFT 対応を介して明確に説明できるのである．

また，重力の古典論（一般相対性理論）の解であるブラックホールから，熱力学や統計力学のように量子系の存在を示唆する性質が現れた理由は，AdS/CFT 対応の公式 (20) から明らかである．つまり，重力の古典論が 1 次元低い量子多体系の量子論に等価になるからである．このように AdS/CFT 対応は，本来量子的であった系を古典的な重力理論に書き変えるので，代数的な物理系を幾何学として解釈しなおす働きがあると言える．

6. 重力理論と量子多体系のエンタングルメント・エントロピー

いままで説明したように，熱力学と重力理論の関係は AdS/CFT 対応を用いることによって明瞭に理解することができる．しかしながら，熱力学は時間がたっても変わらない熱平衡状態に対して成り立つ基本法則であり，現実の我々の世界は，より一般に時間依存するような系（非平衡系）がありふれている．今までの議論で重要な役割を果たしていた熱力学的エントロピーは，この熱平衡を仮定して定義されるものである．従って，より深く重力理論を AdS/CFT 対応の立場で理解するには，熱平衡状態ではない一般の量子状態を解析する必要がある．

そこで既に説明した量子力学の密度行列を用いた記述を思い出そう．どんな量子系でも密度行列 ρ で記述できる．このとき，量子系を A と B という 2 つの部分系に分けよう．特に今は，幾何学的に量子系の空間を領域 A と B に分けることを考える．系全体のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{B}}$ のように直積になる．部分系 A に制限された密度行列 ρ_{A} を，

$$\rho_{\mathrm{A}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathrm{B}}} \rho \qquad (25)$$

のように B に関してトレースアウトして定義する．このときに，ρ_{A} のフォンノイマン・エントロピーは

$$S_{\mathrm{A}} = -\mathrm{Tr}[\rho_{\mathrm{A}} \log \rho_{\mathrm{A}}] \qquad (26)$$

として定義されるが，これを部分系 A に対する**エンタングルメント・エントロピー** S_{A} と呼ぶ．純粋状態に対しては，S_{A} は状態がどれだけ直積状態

($|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle_B$ と書ける状態) から離れているかの見積もりを与え，物理的意味は領域 B が見えないと仮定した場合に生じるエントロピー（情報のあいまいさ）である．従って，ブラックホールのエントロピーと似ていると思われるが，実際以下で説明するように AdS/CFT 対応を用いるとその類似性が理解できる．

このエンタングルメント・エントロピーの利点は，熱平衡状態でなくても任意の量子系のどんな状態に対しても定義することができ，また部分系 A の選択を変えることで無数の異なったエントロピーを定義することができることなどが挙げられる．また最近の物性物理学では，S_A を量子的な秩序パラメーターとして活用し，様々な量子相を見分けるために利用されている．従って，重力理論と統計物理学の関係を理解する上でもエンタングルメント・エントロピーは強力な手段を与える．

さてそれでは，共形場理論のエンタングルメント・エントロピー S_A は AdS/CFT 対応を用いて重力理論の量として解釈できるであろうか？ その答えは，笠と筆者の共同研究で発見され

$$S_A = \frac{\text{曲面 } \gamma_A \text{ の面積}}{4G_N} \tag{27}$$

のように，ブラックホールのエントロピーと似た公式で計算できるのである[6]．ここで，γ_A は，AdS_{d+2} 空間中の d 次元の空間的曲面であり，特に，その境界が ∂A と一致し，極小曲面すなわち面積が最小となるものを選ぶ（図 1 参照）．

共形場理論の空間領域 A と B の情報に対応する AdS 空間は，それぞれ γ_A の内部と外部と解釈される．従って，γ_A はブラックホールを一般化したものと思え，(27) は一般化されたブラックホールに対しても面積則 (9) が成立することを意味する．このように，エンタングルメント・エントロピーという本来量子論的な量も，AdS/CFT 対応を通じて重力理論の立場で解釈すると幾何学的な量に変換されるのである．

7. おわりに

本記事では，重力理論からブラックホールを通じて熱力学・統計力学が現れる様子を説明した．この事実は一般相対性理論を用いれば得られるが，一見パラドックスのように見える．しかしその物理的な背景を理解しようとすると，ホログラフィー原理や AdS/CFT 対応と呼ばれる斬新な考え方へ導かれ，納得することができる．またエンタングルメント・エントロピーという，量子多体系のさらに詳細を記述する量に対しても AdS/CFT 対応を通じて，重力理論の幾何学と密接な関係があることを説明した．このことから重力理論の時空自体が，小さな量子エンタングルメントの集合体とみなせることも示唆され大変興味深い（図 1 参照）．

参考文献

1) ブラックホールの熱力学に関しては，例えば次の教科書を参照のこと．R.M. Wald, "General Relativity", University of Chicago Press, 1984. 原論文は，以下のとおり．S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 191; G.W. Gibbons and S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2752.

2) J.D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).

3) S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).

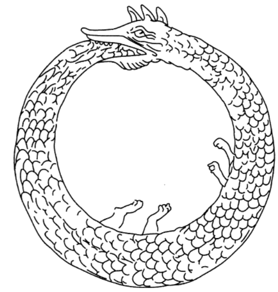
4) 原論文は，G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity," [arXiv:gr-qc/9310026]; L. Susskind, *J. Math. Phys.* **36**, 6377 (1995) [arXiv: hep-th/9409089]. 日本語の解説としては，高柳匡,「ホログラフィック理論とは何か？」, 数理科学 2007 月 12 月号 50 頁，サイエンス社．英語のスタンダードなレビューとしては，D. Bigatti and L. Susskind, "TASI lectures on the holographic principle," [arXiv:hep-th/0002044].

5) 原論文は J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998). 専門的なレビューは，O. Aharony *et. al.*, *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) を参照．日本語のレビューとして別冊・数理科学「量子重力理論」(2009 年）の高柳の記事「量子重力と共形場理論」を参照．

6) 原論文は，S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006) [arXiv:hep-th/0603001]; *JHEP* **0608**, 045 (2006) [arXiv:hep-th/0605073]. 詳しい日本語の解説書として，高柳匡『ホログラフィー原理と量子エンタングルメント』，サイエンス社，SGC ライブラリ 106，臨時別冊・数理科学 2014 年 4 月．専門的レビューは，T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, *J. Phys. A* **42**, 504008 (2009).

（たかやなぎ・ただし，京都大学基礎物理学研究所）

量子論からみた重力



ウロボロス（ουροβόρος）.

細谷　暁夫

1. はじめに

20 世紀初頭に建設された 2 大理論物理学であるところの量子力学と一般相対性理論の相性は悪く，それらを統一するはずの量子重力が一向にできない．

アインシュタインの一般相対性理論をそのまま量子化した場合に，紫外発散が強く繰り込み理論が破綻する．それを克服する理論として素粒子の統一理論である超弦理論が有力とされる．アインシュタイン重力理論の一般座標変換不変性に由来して量子重力には「時間」概念が欠落しているという問題も残っている．それらの問題は，将来，理論の進歩によって解決されるかもしれない．

しかしながら，量子重力における**測定問題**についての研究は皆無と言ってよい．水面下での議論はあるのかもしれないが，専門誌に掲載するほどの研究蓄積がない．漠然と，通常の量子力学の延長線上で考える人たちもいる一方で，宇宙全体に関する波動関数については，その外にいる「観測者」などはないので，そもそも測定過程を必要としないという極論を唱える人もいる．後者の場合には，量子宇宙論は検証不能となり物理にならない．

この記事では，量子重力における測定問題について，専門誌では書けないことを独断的に述べようと思う．

その中で，量子力学と相対性理論の容易ならざる相性の悪さを凝視してみると，量子重力の困難は上に挙げた紫外発散などよりはるかに手強いことが分かるだろう．その困難は，時空の自由度には宇宙全体の構造に関わる**大域的な自由度**が含まれるのに対して，量子力学が想定している測定可能量が空間的に局所的な量であることに起因する．極端に言えば，量子重力に現れる物理量の中に，測定できないものがあるかも知れないのである．

しかし，むしろ相性の悪さの中にヒントがあるかもしれないと逆説的に考えて，試行錯誤のいくつかを紹介しよう．

2. 量子場の理論の局所性

通常の物理においては，興味のある物理量は空間的に限定されており，遠方にあるものを考慮する必要がない．たとえて言えば，地球上の物理量を測るときに，月の裏側の物理量の値を知る必要がない．**物理量の局所性**がないと，物理学は制御不能になると思うので，譲れない原理だろう．

この局所性を数学的にどう表現するか，量子力学，特に量子場の理論の文脈で述べよう．量子場の理論において通常，物理量（観測可能量）はある時空点の近傍に定義されたものである．時空点 x で定義された物理量 $A(x)$ と別の時空点 y で定義された $B(y)$ があるとき，x と y が空間的に離れていれば，演算子として交換可能 $[A(x), B(y)] = 0$ であり，$A(x)$ と $B(y)$ の両方を測定することが可能である．$A(x)$ の値を知ろうとするのに $B(y)$

のことを思い煩う必要はない．このことをもって，量子場の理論は局所的であると言う．この意味で，標準的な量子場の理論は物理の局所性を保証している．

一方，**EPR**（**Einstein–Podolsky–Rosen**）**パラドクス**などに関して，量子力学は非局所的であるとよく言われるので混乱を避けるために一言付言しよう．**ベルの不等式の破れ**は，物理量の実在性（値が測定前から決まっているものを測定がそれを見出す）か量子状態の局所性のどちらか，あるいは両方を破ることを意味する．量子状態が**エンタングル**していることをもって非局所的という一群の研究者がいるが，明らかにその意味はこの節のはじめに述べた物理量の測定に関する非局所性とは異なる．そこで述べた意味の局所性は物理にとって譲れないものなので，ベルの不等式の破れは物理量の値の実在性のほうを否定したものと結論するのが穏当[1,2]，と思う．量子状態がエンタングルしていることは事実として受け入れて，それを示す実証可能なプロトコルを考案するのが量子情報科学の仕事と見ることもできる．

逆に言えば，理論の中から非局所的な物理量すなわち自己共役演算子が排除できないときに，物理として困難が起きる．事実，アインシュタインの一般相対性理論を含む重力理論において，大域的な自由度がかなり普遍的に現れるので，この困難は量子重力で起きる．もっとも簡単な例として，筆者たちが以前に調べた，**(2＋1) 次元アインシュタイン重力**を復習しよう[3,4]．

3. 重力の大域的モード

一般相対性理論において，基本的な変数は計量テンソルである．そのうち，一般座標変換の自由度と，サイズを時空点ごとに変える，いわゆる共形変換の自由度を引き去った残りの，いわば「形の空間」を**スーパースペース**と呼ぶ*1)．量子重力理論とは，そのスーパースペースの量子力学である．そのスーパースペースの座標の中に，大域的な座標と局所的な座標がある．前者については，これから例を挙げて説明する．後者の代表が重力波の振幅である．

重力波は一般相対論の帰結であり，その存在を実証することは極めて重要であるが，それ自体はいわば時空に生じた歪みのさざ波のようなものであり，場の理論としては電磁場と大した違いはない．重力波と電磁波は，両方とも局所的な励起の伝播であり同じ速度（光速）で伝搬する．

重力の特徴は電磁気と違って，それが時空構造と直接関係していることである．したがって，重力理論に大域的自由度が入ることは避けられない．それを明示的に簡単なモデルで見よう．

3.1 トーラス宇宙の古典論

空間 2 次元，時間 1 次元の時空には，重力波のような局所的な自由度がなく空間の**トポロジー**に依存した大域的な自由度だけが存在する．理由は以下の通りである．3 次元時空においてはリーマンテンソルがリッチテンソルで恒等的に表され，アインシュタイン方程式の真空解はリッチテンソルがゼロであることを意味するのでリーマンテンソルがゼロになる．したがって，空間は平面になる．ちなみに重力波もない．

簡単な例として，空間がドーナッツの表面と同じトーラスのトポロジーを持つとしよう*2)．まず，トーラス空間の構成法を説明しよう．

図 1 のような平行四辺形を考えよう．底辺は長さ 1 に固定すると，その形は図中の P 点のデカルト座標 (ξ,η)（$-\infty<\xi<+\infty$, $\eta>0$）で特徴づけられる．次に，相対する辺を張り合わせよう．上下の辺を張り合わせると筒状のものができ，その両端の穴を張り合わせるとトーラスができる．P 点が傾いた位置にあるために捩じれたドーナッツの表面の形をしている．η が 1 より小さければ細いトーラスができ，その逆だと太いトーラスができる．

しかし，はじめに左右の辺を張り合わせると，そ

*1) 超対称性理論で使う superspace とは全く別もの．

*2) 宇宙のトポロジーについては，宇宙背景放射のデータに基づいた研究があるが，確定的なことは言えていない[5]．

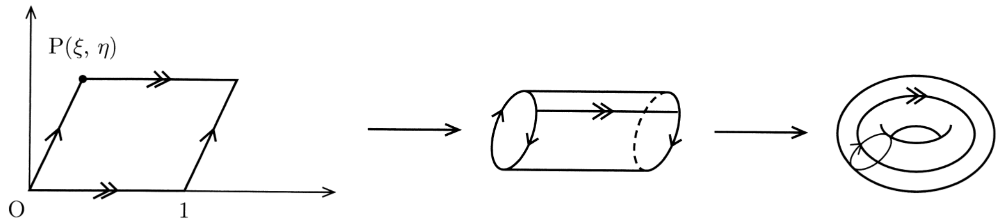


図 1　トーラス宇宙の作り方.

の η が 1 より小さければ太いトーラスができ，その逆だと細いトーラスができる．この張り合わせの順番は，トーラス宇宙自体にはどうでもよいはずなので，同じ宇宙とみなそう．

上記の座標 (ξ,η) はトーラスの形を決めるもので，**タイヒミュラーパラメタ**と数学では呼ばれている．タイヒミュラーパラメタは，宇宙全体の形を決めるものであって，空間のどこかに局所的に存在するものではない．さらに，上記の張り合わせの順番を無視するという，同一視を行った，より制限された領域（基本領域と呼ばれる）で定義されたものをモジュライパラメタと呼ぶ．張り合わせの順番上下から左右を左右から上下に変えることはトーラスを裏返すことに対応している．この裏返しの操作をモジュラー変換と呼ぶ．この記事では，これ以上基本領域の議論に立ち入らない．

ある時刻における宇宙の形は，時空を時間と空間に切り分けるやり方に依存する．ヨークによる切り分けがよく使われる．それは外曲率テンソルの跡を時間に選ぶやり方で，相対論独特の非線形の拘束条件を解くときに便利である．ここでは，その詳細を論文[3]に委ねて，τ と書くことにする．

アインシュタインの一般相対性理論から出発するときに，宇宙の形を表すタイヒミュラーパラメタ (ξ,η) は時間を τ として，どのような運動をするのであろうか？ 興味深いことに，それはロバチェフスキー双曲幾何学の計量

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\eta^2} \tag{1}$$

によって決まる測地線，すなわち ξ 軸と直角に交わる半円をたどる（図 2）．ドーナッツとしては，太いドーナッツが捩じれながら細くなり最後には

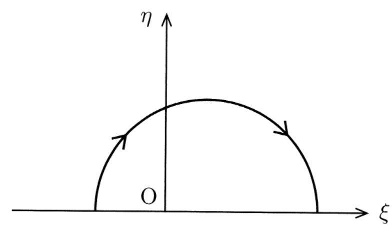


図 2　トーラス宇宙の運動.

円環になる（あるいはその逆）．

3.2 トーラス宇宙の量子論[3, 4)]

アインシュタイン重力の正準量子化を行うと，**宇宙の波動関数** $\Psi(\xi,\eta,v)$ に対するハミルトニアン拘束条件から

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \eta^2(\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)\right]\Psi(\xi,\eta,v) = 0 \tag{2}$$

が，いわゆるウィーラー・ドウィット方程式[6)]として導出される．

ただし，v は宇宙の面積で前出の τ に正準共役な座標で，$s := \log v$ である．括弧の中の第 2 項が双曲空間のラプラシアンなので，ウィーラー・ドウィット方程式は双曲空間における波動方程式に他ならない．$\eta = 0, \infty$ において，波動関数 $\Psi(\xi,\eta,v)$ がゼロになるという境界条件をおき，モジュラー変換に対する不変性を要求すると波動関数 $\Psi(\xi,\eta,v)$ が決まる．

ここまでは数学である．物理に進むには，何らかの意味で測定過程を考えることが必要になる．少なくとも，原理的に測定とは何かを理論的に与える必要がある．

ここで，問題が起こる．量子重力には大域的な変数が入ってくる．$(2+1)$ 次元重力の場合な，大域的な変数しかないが，物理的な $(3+1)$ 次元重

力の場合には重力波という局所的な変数と宇宙の形を決める大域的な変数が混在する．

4. 物質と時空のエンタングルメント？

しかし，現実に時空を直接測定することはできなく，直接には必ず物質を見て，その結果から時空自体の構造を推論するのである．このことは広い意味で物質と時空が量子的な相関を持っていなければできない．あまりにも未知の領域なので，ここでは，ごく形式的な考察に留めよう．

物質に対しては場を導入して，量子化を行う．そうすると，たとえ (2+1) 次元重力であろうと，上記のように簡単にはならない．形だけに着目しよう．

ハミルトニアン拘束条件はすべての空間点 $\boldsymbol{x}$ に対して

$$H(\boldsymbol{x})\Psi(g,\phi)=[G(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{x})]\Psi(g,\phi)=0 \tag{3}$$

の形をしている．ここに，$G(\boldsymbol{x})$ は重力による部分，$T(\boldsymbol{x})$ を物質のエネルギー運動量テンソルから来る部分と象徴的に表そう．ただし，g を空間計量，ϕ を物質場とする．

通常は，これを無限次元空間における波動方程式と見なす．それは歴史的には，クライン・ゴルドン方程式について起きた問題すなわち，確率が正定値にならないなどの困難を抱え込む．

しかし，この節のはじめに述べたように，測定はあくまで物質を対象とした測定であることに着目すると，全く別の見方があり得る．

5. 量子測定理論とエンタングルメント

その前に，量子測定理論について解説をしなければならないのだが，準備が大変なので，精神だけを述べよう．被測定系 1 と測定器系 2 が相互作用すると状態は一般には

$$|\Psi\rangle=\sum_{i,j} f_{ij}|i\rangle_1\otimes|j\rangle_2,\quad f_{ij}\in\mathbf{C} \tag{4}$$

の形をしていて，1 の状態と 2 の状態の単純な積

では書けない．積で書けない状態のことをエンタングルした状態と呼ぶ．

何らかの外的方法で測定器系 2 の状態を $|j\rangle_2$ に絞り込めば，確率 $|f_{ij}|^2$ で被測定系 1 の状態が $|i\rangle_1$ に選び出される．このような，1 と 2 の間に相関があるために，測定が可能になる．被測定系 1 の状態と測定器系 2 の状態のエンタングルメントが意味のある測定が可能になる前提条件である．

例を挙げよう．シュテルン・ゲルラッハの実験において，スピンを持った粒子のビームが非一様磁場を通過した後にスクリーンに当たるとしよう．その位置でスピンが上向き $|\uparrow\rangle$ か下向き $|\downarrow\rangle$ か分かる．この場合に，スピンが被測定系 "1" であり，粒子の経路が測定器系 "2" の物理量である．その 2 者がエンタングルしているからこそ，経路（スクリーン上の輝点）からスピンが分かる．

時空と物質のエンタングルメントに類似なもので EPR 設定[1,2]のボームバージョンを考えよう．A のスピン（の 2 倍）を $\boldsymbol{\sigma}_1$，B のスピンを $\boldsymbol{\sigma}_2$ とすると，合成スピンがゼロの状態は

$$[\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2]|\Psi\rangle=0 \tag{5}$$

と表現できる．これを満たす状態はよく知られているように 1 重項状態

$$|\Psi\rangle=\frac{|\uparrow\rangle_1\otimes|\downarrow\rangle_2-|\downarrow\rangle_1\otimes|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

となり，積状態では書けないので，確かにエンタングルしている．

ここで，1 のスピンを知りたい物理量とし 2 のスピンを測定器と考えよう．例えば，2 のスピンをシュテルン・ゲルラッハの実験における非一様磁場を通過させてスクリーンの当たった位置でスピンを判定する．

さらに，(3) と (5) を類似と見よう．つまり，知りたい時空に関するハミルトニアン演算子 $G(\boldsymbol{x})$ と測定できる物質に関するハミルトニアン $T(\boldsymbol{x})$ が，それぞれ A のスピン $\boldsymbol{\sigma}_1$，2 のスピン $\boldsymbol{\sigma}_2$ が対応すると見るのである．より詳しく言えば，量子重力の場合には空間の各点 $\boldsymbol{x}$ 毎に拘束条件が充たされなければならないのに対応して，スピンの場合は，スピンの成分 x, y, z すべてについて対応する必要がある．

スピンの場合には，拘束条件が簡単に解けて 1 重項状態になるが，量子重力の場合には込み入っていて明示的に書くのは難しい．物質を測定して時空を知る構図は理解して頂けたと思う．

以下では，ハミルトニアン拘束条件を解いた後に，時空の大域的変数と物質の局所的な変数がエンタングルしていたという「ムシのよい」仮定をする．本当に知りたいのは，宇宙の大域的な変数についての知見であるが，それとエンタングルしている局所変数を普通の量子測定をする．

しかし，それではどのような測定すればよいのであろうか？ ベルの不等式の破れがヒントになるとすれば，物質の局所的な変数を多数回測定して何らかの相関関数を求めるのだろう．簡単なモデルで議論を具体化できると嬉しいのだが，今のところそのモデルがない．

6. 相関関数

粒子 1 のスピン（の 2 倍）を $\boldsymbol{\sigma}_1$，粒子 2 のスピンを $\boldsymbol{\sigma}_2$ として，各々を軸 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ を量子化の軸にして観測しよう．観測量を $a=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1$, $b=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2$, $c=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1$, $d=\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2$ と定義する．観測すれば a, b, c, d は ± 1 の価を取ることに注意してほしい．

相関関数 $C(a, b, c, d)$ を

$$C(a,b,c,d)=\langle ab\rangle-\langle bc\rangle-\langle ad\rangle-\langle cd\rangle \tag{7}$$

と定義しよう．ここで，右辺に現れる括弧は，EPR の 1 重項状態

$$|\Psi\rangle=\frac{|\uparrow\rangle_1\otimes|\downarrow\rangle_2-|\downarrow\rangle_1\otimes|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

における期待値である．

$|\Psi\rangle$ は，全角運動量 $\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2=0$ の状態であるから

$$\begin{aligned}\langle s|ab|s\rangle &= \langle s|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2|s\rangle\\ &= -\langle s|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1|s\rangle=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}. \end{aligned}\tag{9}$$

したがって，量子論では

$$
\begin{aligned}
&|\langle ab\rangle - \langle bc\rangle - \langle ad\rangle - \langle cd\rangle| \\
&= |-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}| \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となり，これは，最大値 $2\sqrt{2}$ まで取り得る．最大値 $2\sqrt{2}$ は，単位ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が45度をなし，$\boldsymbol{d}$ が $\boldsymbol{b}$ と直交して $\boldsymbol{c}$ と135度をなし，$\boldsymbol{d}$ が $\boldsymbol{b}$ と直交して $\boldsymbol{a}$ と135度をなすとき実現する．アスペの実験では，光子の偏光を用いているが，上述の相関が古典限界2を越えていることが示されたことはよく知られている．

さて，ここまでがベルの不等式の破れの復習である．この議論で中心的な役割を果たした相関関数 $C(a,b,c,d)$ に当たるものを，量子重力の中に見出すことができるのだろうか？

$a=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1$ に対応するものを形式的に書くと，空間点 $\boldsymbol{x}$ の関数 $g(\boldsymbol{x})$ を用いて $\int d\boldsymbol{x} g(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x})$ になるだろう．b, c, d についても同様である．しかし，形式論だけではこの先に進めない．

7. むすび

時空の自由度には宇宙全体の構造に関わる大域的な自由度が含まれるが，一方，量子力学が想定している物質に関する測定可能量が空間的に局所的である．局所的な物理量の測定から大域的な自由度についての情報を得るには，その2者がエンタングルしている必要がある．そのエンタングルメントを決める方程式がハミルトニアン拘束条件であろう，と推測する．しかも，重力と物質の相互作用は弱いので，デコヒーレンスはほとんど起きない．したがって，いったんエンタングルメントができると宇宙の歴史を通じて維持される．

それでは，時空の大域的な状態とエンタングルしているのは物質のどの状態なのだろうか？ 何らかの意味で，物質のエネルギー密度の平均などと関係するのかもしれないが，五里霧中である．

この難問は，量子重力における紫外発散の困難とは異質の難問である．時空は不可避的に大域的であり，物質の量子力学は局所的であることに根本原因があるので，深刻と言える．解決法は不明であるが，どこかでミクロ（局所）とマクロ（大域）が，双対的に繋がっている構造が必要であると筆者は記事冒頭に掲げたウロボロスの絵のようなことを考えている．

参考文献

1) A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
2) J.S. Bell, *Physics (Long Island City, N.Y.)*, **1**, 195 (1964).
3) A. Hosoya and K. Nakao, *Prog. Thoer. Phys.* **84**, 739 (1990).
4) S. Carlip, *Quantum Gravity in* (2+1) *Dimensions*, ISBN 0-521-54588-9, Cambridge, UK: Cambridge University Press, December 2003.
5) Cornish N.J., Spergel, D.N., Starkman G.D., *Phys Rev Lett.* **77**, 215 (1996).
6) B.S. DeWitt, *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).

（ほそや・あきお，東京工業大学名誉教授）

素粒子論からみた重力



九 後　汰 一 郎

1. はじめに

素粒子論は，1934年の，Fermiのβ崩壊の理論とYukawaの中間子論あたりから始まり，1970年代前半の標準理論の成立で一応の決着を見た．その間―40年であるが―素粒子論においては重力は一度も重要なテーマにはならなかった．ただ，ゲージ理論の発展に際して，Einsteinの一般相対論が局所ゲージ不変性を持つ理論のお手本として，あるいは，ゲージ場とパラレルにその摂動計算ルールやユニタリー性に関して，形式的な場の理論的観点からの研究はなされてきた．重力は，日常的には一番強く感じる力であるのだが，それこそ「万有引力であってマクロな数の粒子間の力がすべて相加的に働くため」であって，素粒子間に働く力としては，極めて微弱であり，全く考慮する必要がなかったせいである．

しかし，標準理論の成立とほぼ同時に大統一理論（Grand Unified Theory; GUT）が提唱され，10^{16} GeVという超高エネルギーになると，素粒子の3つのゲージ相互作用―強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用―の結合定数が，ほぼ同じ大きさの値になるということが言われ出した．ところがこのエネルギーの値―GUTスケール10^{16} GeV―は，(reduced) Planckスケールと呼ばれる重力の特徴的なエネルギーの値

$$M_{\mathrm{P}}=\frac{1}{\kappa}=\sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}}\sim 10^{18}\,\mathrm{GeV}$$

にかなり近い．このPlanckスケールでは，重力の相互作用が1のオーダーになって，重力も他のゲージ相互作用と一緒に統一されるのではないかという期待が生じた．しかし，重力の結合定数がオーダー1になるとその量子効果が無視できず，この時点で重力の量子論，すなわち量子重力理論をまじめに考える必要性が出てきたのである．

2. 素粒子論における重力の問題 ――量子重力理論

素粒子論において重力の問題の一つは，それゆえ，

量子重力理論とは何か？

ということである．これはしばしば「重力（理論）の量子化」の問題とも呼ばれるので，初学者が往々にして「すでに古典論としては存在するEinsteinの重力理論＝一般相対論を量子化する」だけの問題，と誤解する．

事はそれほど単純ではない．

強・電磁・弱相互作用のみの標準模型のゲージ理論は，良く知られているように，紫外発散を生じる高エネルギー側では，結合定数が小さくなり（漸近自由性（asymptotic freedom））摂動論が使え，摂動論的にくり込み可能性が証明できたのである．また，低エネルギー側では摂動論の使えない$SU(3)_{\text{カラー}}$の量子色力学（Quantum Chromodynamics; QCD）に対しては，格子ゲージ理論による定式化での「非摂動論的な定義」も与え

られており，紫外切断パラメータ $\Lambda \to \infty$（格子間隔 $a \to 0$）の連続理論極限で well-defined な理論が存在するだろうことは，（未だ数学的には証明されていないが）まず間違いない．

ところが，Einstein の一般相対論は，すべての（非可換）ゲージ理論で成功したくり込み理論が適用できない．すなわち，漸近自由性を持たず，紫外極限で結合定数はどんどん大きくなり，摂動論的にはくり込み不可能である．摂動論の範囲内で次数勘定定理に従い紫外発散が出るグラフを考えると，摂動の次数を上げれば上げるほど新たな発散グラフが現れ，次元（場や微分の次数）の高い相殺項が次々に必要となる．このため，多くの研究者は，Einstein 重力理論自体は，量子論としては存在しない，と考えている．すなわち，Planck スケールより下のエネルギー領域でのみ意味を持つ「低エネルギー有効理論」である，と見なされている．

しかし，このことも単に摂動論の解析からの推測であって，実は，Einstein–Hilbert 作用で定義される Einstein 重力理論のままで，非摂動論的な計算をすれば「くり込み可能」で Green 関数が有限に決まっている，という可能性[1]がないわけではない．しかし，可能性としては排除できないとしても，具体的な計算法を与える構成的な定義がない限り，理論が存在することを万人に納得させることは難しい．

量子重力理論は，通常の場の理論とは相当に違ったものだ，というのが大方の素粒子論研究者の見方である．そしてその可能性の筆頭が**超弦理論**である．実は，超弦理論も摂動論的には定義されているものの，摂動論を越えた定義は未だ与えられていない．ただ，そういう定義を与えようという試みはいろいろとなされている．例えば，時空に拡がった弦を一挙に作ったり消したりする演算子としての「弦の場」を扱う「弦の場の理論（String Field Theory; SFT）」のアプローチ[2]がある．このアプローチでは，26 次元平坦時空上で定義されたボソン弦の理論の不安定性が，タキオンモードの凝縮によって解消されることが Witten のボソン弦の場の理論の厳密解で見事に証明される，という快挙が近年あった．しかし，他の閉弦の場合や超対称弦の場合は，弦の場の理論の作用積分をあらわに書き下すこと自体が難しく，また，書き下された弦の場の理論が果たして well-defined であるかどうかもわからない．

摂動論を越えた弦理論の定義への他のアプローチには，種々な次元の D-ブレーン[3]（や M-ブレーン）描像に基づいた行列模型，さらには，弦理論と，それより次元の低い境界時空上で定義された共形不変なゲージ理論との間の双対性に基づいて，弦理論をそれと双対なゲージ理論で定義しようというアプローチもある．それぞれのアプローチに抱える問題があり，どれも未だ決定打とは言えない状況であるが，構成的な定義に最も近いのは行列模型による定義であろう．特に，D-インスタントン描像に基づく IIB 行列模型[4]は，それ自体に時間空間概念さえ含まない（それゆえ力学系でさえない）もので，行列の自由度から，時間空間概念が創発され，さらにはその時空上での弦の生成・消滅が記述されるという野心的なものである．時空の創発ということまでもが議論できる理論・枠組みを作る，という壮大な試みが，超弦理論の構成ということである．従って，超弦理論の研究者は，「重力の量子論を作る」ということは，そこまで行かないといけないという風に考えているわけである．しかし，壮大な試みであるだけに，残念ながら，その理論構成にはまだまだ時間がかかりそうである．筆者には，このアプローチをこれ以上ここで紹介する技量も時間もないので，もう一つの，そしてこの稿の本題の問題に移りたい．

3. 宇宙項問題

素粒子論研究者から見たもう一つの重力に関わる重大問題，そしてこの稿で本当に議論したいテーマは，**宇宙項の問題**である．M_{P} より低いエネルギー領域では，Einstein 重力理論が基本的に正しいことは，下でも説明するように，ほぼ間違いがない．一方，1970 年代に成立した強・電弱ゲージ理論の標準模型が場の量子論として無矛盾な理論

であることも間違いがない．しかるに，どうも，Einstein 重力理論は後者の場の理論の「真空凝縮エネルギー」を宇宙項として感じていない，ということが現在の**場の量子論と重力理論にまたがる最大の未解決問題**なのである．

これ以降この問題を

1. Einstein 重力理論の一意性，
2. 問題の深刻さ，
3. 対称性の自発的破れに伴う凝縮エネルギーと場の真空エネルギー，
4. 量子重力は無関係，
5. 真空エネルギーは宇宙項として働くのか？

の観点から議論したい．

3.1 Einstein 重力理論の一意性

量子重力理論は，未だに混沌としてどういう形になるのかわからないが，それがどういうものであれ，Planck エネルギー $M_{\rm P}$ より低いエネルギー領域における**低エネルギー有効理論としては，Einstein–Hilbert 作用で記述される一般相対論が一意的な理論**なのである．この事実は昔 Weinberg[5] によって証明されたことで，「重力が（非相対論的な場合に）$1/r^2$ 法則に従う万有引力であれば，それはスピン 2 の零質量粒子によって媒介される力である．零質量のスピン 2 の粒子を記述する矛盾のない理論は，一般座標不変性を持たねばならず，微分の階数が最低のものは，一意的に Einstein–Hilbert 作用である．」という内容だ．

従って，通常の $M_{\rm P}$ よりはるかに下のエネルギーを特徴的なスケールとする場の理論の「宇宙項問題」は Einstein 重力理論の枠内で考えなければならない．重力や通常の場の量子効果については 3.4 小節でさらに議論しよう．

3.2 問題の深刻さ

現在，宇宙スケールで見つかっている宇宙項の値は，

$$\Lambda_0 \simeq 10^{-29}\,{\rm gr/cm^3} \simeq (2.5\times 10^{-12}\,{\rm GeV})^4$$

である．しかし，我々の信頼する場の理論は，これよりもずっと大きい真空エネルギーの存在を主張するのである．エネルギーの低い（従ってより確かな）所から述べれば，まず，強い相互作用の QCD においてカイラル対称性がダイナミカルに自発的に破れていることは実験的にも理論的にも間違いないところである．それを引き起こすクォーク対のカイラル凝縮 $\langle \bar{q}q\rangle \neq 0$ に伴う真空エネルギーは，ダイナミクスの詳細にはよらず QCD の特徴的なスケール $\Lambda_{\rm QCD}\sim 200\,{\rm MeV}$ の 4 乗のオーダーである．従って，現在観測されている宇宙項 Λ_0 の 10^{44} 倍である：

カイラル凝縮エネルギー：$\langle \bar{q}q\rangle^{\frac{4}{3}} \simeq 10^{44}\times \Lambda_0$.

標準模型の成功は，さらに大きな真空エネルギーの存在を予言する．それは，Higgs 場の凝縮による電弱対称性 $SU(2)\times U(1)$ の自発的破れである．これに伴う真空エネルギーは，Higgs 場 Φ の真空期待値 $\langle\Phi\rangle \simeq 250\,{\rm GeV}$ の 4 乗のオーダーであり，Λ_0 の実に 10^{56} 倍である：

Higgs 場の凝縮エネルギー：$\langle\Phi\rangle^4 \simeq 10^{56}\times\Lambda_0$.

ここまでは，ほぼ実験的に実証されている対称性の破れである．しかし，標準模型の成功は，同時にそれを越えるクォークとレプトンの大統一理論の存在を強く示唆する．もし大統一理論が存在すれば，その統一ゲージ対称性の自発的破れに伴う真空凝縮エネルギーは，大統一スケール $M_{\rm GUT}\simeq 10^{16}\,{\rm GeV}$ の 4 乗のオーダー $\sim 10^{112}\times\Lambda_0$ であり，さらに (reduced) Planck エネルギーで重力も統一される自発的対称性の破れがあるなら，実に 120 桁も大きい $\sim 10^{120}\times\Lambda_0$ となる．

後者 2 つはともかく，前者 2 つの真空エネルギーの存在は間違いない．しかるに，それらの既に莫大な真空エネルギーが，Einstein 重力理論によって宇宙項として全く感じられていない，ということがこの「宇宙項問題」なのである．実際もし，これらが宇宙項として働けば，この宇宙は一瞬のうちに収縮してつぶれているか，膨張してあらゆる構造がなくなってしまっているか，であり，どちらにせよ現在のような静謐な宇宙は存在できない．

3.3 対称性の自発的破れに伴う凝縮エネルギーと場の真空エネルギー

上で述べた，対称性の破れに伴う真空の凝縮エ

ネルギーと，場の理論を習い始めて最初に出会う紫外発散である「場の真空エネルギー」(すなわち，ボソン場の場合は，全基準モードの零点振動エネルギーの和 $(+\infty)$，フェルミオン場の場合は，占有された負エネルギー準位のすべてのエネルギーの和 $(-\infty)$) と，さらに，Feynman グラフで言うところの「真空泡グラフの寄与」とが，実はほとんど同じものであることを確認しておきたい．

対称性の自発的破れに伴う「真空の凝縮エネルギー」として最も理解しやすい Higgs 場のポテンシャルエネルギーを見よう．$SU(2)$ 2 重項の Higgs 場 $\Phi=(\phi_1,\phi_2)$ は，良く知られたワインボトルの底の形をしたポテンシャル項

$$V(\Phi)=-\frac{\mu^2}{2}\Phi^\dagger\Phi+\frac{\lambda}{8}(\Phi^\dagger\Phi)^2 \qquad (1)$$

を持ち，エネルギー的に一番低い，$\Phi^\dagger\Phi=|\phi_1|^2+|\phi_2|^2=2\mu^2/\lambda$ を満たす複素‘円周’上のどこかに真空期待値を持つ．円周上のどこを選んでも物理的に等価であるが，どこかを選ぶと $SU(2)$ 対称性が自発的に破れる．通常のように ϕ_2 の実部方向に期待値をとれば，Higgs 場は真空期待値 $\langle\Phi\rangle=(0,v)$ を実現し，その点で真空は，

$$V(\langle\Phi\rangle)=-\frac{\mu^2}{2}v^2+\frac{\lambda}{8}v^4=-\frac{\mu^4}{2\lambda}$$

と負のエネルギー密度を持つことになる．しかし，これは，対称な真空 $\langle\Phi\rangle=(0,0)$ をエネルギー密度の原点としたためで，$V(\Phi)$ に定数 c を加えた $V(\Phi)+c$ が初めのポテンシャルだった，と考え，しかも，c がちょうど $+\mu^4/2\lambda$ であれば，この対称性が自発的に破れた真空で真空エネルギーが 0 になる．そうすると，宇宙項問題は存在しない．この定数項 c というのは，いわゆる「宇宙項の相殺項」であるが，この考え方には無理がある．これについてはこの小節の最後に議論しよう．

次に，QCD のカイラル凝縮エネルギーも，ここで見た Higgs 場の凝縮エネルギーと同種のエネルギーであること，を見ておこう．違いは単に，標準模型では Higgs 場は‘素’スカラー場であるが，QCD の場合は，クォーク対が実効的なスカラー場を与えるというだけである．QCD のダイナミクスは，より扱いの簡単な南部–Jona-Lasinio (NJL) 模型で実効的に記述できることが知られているのでそちらで説明しよう．また，クォークのフレーバーの自由度も省略してクォーク場を $q(x)$ と書いて NJL 模型[6)] の Lagrangian を書けば，

$$\mathcal{L}_{\rm NJL}=\bar{q}i\gamma^\mu\partial_\mu q+\frac{G}{4}[(\bar{q}q)^2+(\bar{q}i\gamma_5 q)^2] \quad (2)$$

と与えられる．この系は，クォーク質量項 $-m\bar{q}q$ が存在しないので，位相変換 $q(x)\to e^{i\theta}q(x)$ だけでなく，カイラル変換 $q(x)\to e^{i\gamma_5\theta}q(x)$ の下でも不変である．さらに，補助場 $\sigma(x)$ と $\pi(x)$ を導入して Lagrangian を

$$\mathcal{L}_{\rm Y}=\bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu-\sigma-i\gamma_5\pi)q-\frac{1}{G}(\sigma^2+\pi^2) \quad (3)$$

と書きかえた系と等価である．実際，補助場は運動項（微分項）を持たず，その運動方程式

$$\sigma=-\frac{G}{2}\bar{q}q,\quad \pi=-\frac{G}{2}\bar{q}i\gamma_5 q$$

は，確かに σ がスカラークォーク対，π が擬スカラークォーク対を表していることがわかる．これを代入して $\sigma(x)$ と $\pi(x)$ を消去すれば，明らかに (3) の $\mathcal{L}_{\rm Y}$ は初めの NJL 模型 $\mathcal{L}_{\rm NJL}$ (2) に帰着し等価であることがわかる．

さてこの系の有効ポテンシャル V をボソン場 σ と π の関数として求めよう．カイラル対称性から，V は $\sigma^2+\pi^2$ の関数であることがわかっているので，簡単のため $\pi=0$ として計算する．クォークの 1-loop グラフの寄与のみを考える近似では有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned}V(\sigma)&=\frac{1}{G}\sigma^2-\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\ln\det[\gamma_\mu k^\mu-\sigma]\\&=\frac{1}{G}\sigma^2-2\int\frac{d^4k}{i(2\pi)^4}\ln(\sigma^2-k^2) \quad (4)\end{aligned}$$

となる．第 2 項が σ 凝縮があるときのクォーク 1-loop の真空泡グラフの寄与であるが，ここでは σ は x-依存なしの定数なので，クォークの質量として働いていることに注意したい．この第 2 項の k の 4 次元積分は，このままでは紫外部で発散しているので，運動量をユークリッド化 $k_{\rm E}\equiv(k^1,k^2,k^3,k^4=k^0/i)$ して積分を $k_{\rm E}^2\le\Lambda^2$

の範囲にカットして

$$\int \frac{d^4k}{i} f(-k^2) \to \int_0^{\Lambda^2} dk_{\rm E}^2 \pi^2 k_{\rm E}^2 f(k_{\rm E}^2)$$

と定義する．そうすると積分は初等的に実行できて

$$V(\sigma) = \frac{1}{G}\sigma^2 - \frac{1}{16\pi^2}\left\{\Lambda^4 \ln\left(1+\frac{\sigma^2}{\Lambda^2}\right) -\sigma^4 \ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{\sigma^2}\right) + \sigma^2\Lambda^2\right\} \quad (5)$$

となり，このポテンシャルは，

$$V(\sigma) \sim \begin{cases} \left(\dfrac{1}{G} - \dfrac{\Lambda^2}{8\pi^2}\right)\sigma^2, & \sigma^2 \ll \Lambda^2, \\ \dfrac{1}{G}\sigma^2, & \sigma^2 \gg \Lambda^2 \end{cases}$$

と振る舞う．すなわち，$1/G < \Lambda^2/8\pi^2$ の場合は原点近傍でいったん負のほうに下がり，σ^2 が十分大きい所では正に大きくなるので，$\sigma^2 \neq 0$ のどこかで負の最小点を実現する．よって，結合定数 G が臨界値 $G_{\rm cr} = 8\pi^2/\Lambda^2$ を越えれば，σ はゼロでない期待値 $\langle\sigma\rangle \neq 0$ を実現し，(σ, π) 平面での回転であるカイラル対称性は，自発的に破れることになる．

(5) 式の $V(\sigma)$ が，Higgs の場合の凝縮エネルギーポテンシャル (1) に対応するが，このエネルギーは (4) 式で見たように，クォーク場 1-loop の真空泡グラフの寄与から来ており，それはまた同時に，クォーク対の真空期待値 $\sigma = -G\langle\bar{q}q\rangle/2$ だけの質量を持ったクォークの真空エネルギー（Dirac 場の負エネルギー準位 $-\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\sigma^2}$ のすべての $\boldsymbol{k}$ とスピンにわたる和）にも等しい[7]ことに注意したい．

この NJL 模型に基づいた計算では，クォーク 1-loop の寄与は真空エネルギーの常として発散していたので，人為的にカットオフ Λ を（物理的な考察から）$1\,\text{GeV} \sim 5 \times \Lambda_{\rm QCD}$ くらいにとらなくてはならなかった．しかし，実際に QCD の漸近自由性を考慮したグルーオン交換の梯子近似の Schwinger–Dyson 方程式などを用いた計算では，生成されるクォークの質量は，定数ではなく運動量の関数となって，それによる真空エネルギーは自動的に有限に $\Lambda_{\rm QCD}^4$ のオーダーに計算される，ということにも注意しておきたい．

最後に，上で，宇宙項の相殺項 c があって，真空（凝縮）エネルギーを相殺している，という考え方には無理がある，と述べた．この理由を今や説明できる．この考え方だと宇宙項の相殺項はあらかじめ用意されているはずだが，今，宇宙の歴史をエネルギースケール（温度）を下げてくる過程として考えよう．そうすると，（大統一理論や Planck スケールは省いても）まず，電弱スケール $\sim 200\,\text{GeV}$ まで下がってくると，Higgs 凝縮が起こり，その凝縮エネルギーは宇宙項相殺項 c でほぼ完璧に相殺されていなければならない．ほぼ完璧というのは，完璧に相殺するのはダメで，エネルギーを $200\,\text{GeV}$ からさらに $200\,\text{MeV}$ に下げていくと，次の QCD でのカイラル凝縮が起こるので，その段階で生じる凝縮エネルギーを相殺するための**相殺項は残しておかねばならない**からだ．それでちょうど $(\text{MeV}/\text{GeV})^4 = 10^{-12}$ の精度で相殺しておく必要があるのである．そして，12 桁下がって幽かに残っている相殺項で次のカイラル凝縮エネルギーを相殺しなければならない．また，ここでも現在の宇宙項の観測値 Λ_0 は相殺せずに残しておかねばならないのでさらに 10^{-44} の精度での相殺である．対称性の自発的破れが，大統一理論や Planck スケールでも起こっているとなると，この宇宙項の相殺項 c のチューニングはさらに厳しく 120 桁もの値が精度良く決まった値であらかじめ用意されていないといけないということである．120 桁でなく 44 桁であっても十分に，そういう相殺項があるとはとても信じられないだろう．

3.4 量子重力は無関係

上で「Einstein 重力理論は，低エネルギー有効理論である」と言ったが，「低エネルギー有効理論」という言葉は「術語」として用いたので，その意図を若干説明しなければならない．QCD を例にとると分かり易い．強い相互作用の基礎理論は QCD であり，それは，カラー $SU(3)$ 基本表現に属するフェルミオンのクォーク場と，カラーの力を媒介する $SU(3)$ 随伴表現のゲージボソンのグルーオン場とで書かれた，ゲージ不変な Lagrangian で

記述される．しかしQCDの特徴的なスケール—(2–3)×$\Lambda_{\rm QCD}\sim 500\,{\rm MeV}$—くらい以下のエネルギー領域であれば，直接にQCD Lagrangianを扱わず，（近似的）カイラル対称性の自発的破れに伴う，π 中間子などの南部–Goldstone（NG）ボソン場だけで記述される低エネルギー有効理論のLagrangianを使えば十分である．この低エネルギー有効Lagrangianは，カイラル対称性の要求だけから，微分の最低次の作用は（場の変数の取り方の任意性を除いて）一意的に決まり，カイラル非線形シグマ模型と呼ばれる．また，NGボソンの核子などへの結合の仕方も低エネルギー領域ではカイラル対称性の要求だけから決まっている．NGボソンの有効Lagrangianは，高次の微分を許すと一意的でなくなるが，各次数で有限個の不変Lagrangianの線形結合で与えられる．NGボソンの量子効果も，有効Lagrangianに基づいたNGボソンループのFeynmanグラフで評価でき，その結果もエネルギーで展開して，各次数の発散項を，各次数の有効Lagrangianのパラメーターにくり込んでいける（有効Lagrangianに対するこのくり込み処方はWeinberg[8)]によって与えられた）．

重力理論の場合は，$M_{\rm P}$ 以上のスケールで量子論としてどういうLagrangianで記述されるのか，基礎理論が（そもそも局所的場の理論なのかどうかさえ）わかっていない．しかしながら，$M_{\rm P}$ 以下のエネルギー領域では，基礎理論の如何に関わらず，一般座標不変性という要求が重力のLagrangianを，微分の最低次では一意的に決定する．それがEinstein–Hilbert作用であって，上で言うQCDの場合のNGボソンのカイラル非線形シグマ模型に相当する，低エネルギー有効理論なのである（この類推では重力場はNGボソン場に対応するが，事実，重力子は $GL(4)$ 対称性の自発的破れに対応したNGテンソルボソンと見ることができる[9)]）．NGボソンの核子などへの結合の仕方もカイラル対称性から決まったように，重力子の物質場への結合の仕方も，一般座標不変性から低エネルギー領域では一意的に決まる．

Einstein重力理論でも，重力のループによる量子効果を上述のWeinbergの低エネルギー有効理論の意味でのくり込み処方を用いて計算することはできる．しかし，その結果のエネルギー E による展開は，分母が重力の特徴的なスケール $M_{\rm P}$ で与えられるものなので，Planckエネルギーより十分下のエネルギー $E/M_{\rm P}\ll 1$ では実際上全く効かず，Einstein重力理論は，重力場に関しては，実質的に古典論として扱って全く問題がない，ということになる．

Planckスケール $M_{\rm P}$ より十分下のエネルギー領域でも，重力場以外の場，クォーク場やHiggs場や強・電磁・弱ゲージ場，はすべて量子論的補正をフルに考慮される「量子場」である，ことには注意しなければならない（これは上記のQCDの場合とは若干事情が異なる）．Einsteinの重力場を古典場として扱う，というのは，もちろん，低エネルギー有効理論の意味のくり込みはやる，という限りにおいてである．実際に，Einsteinの重力場の下にある重力場以外の場の量子効果を考えると，それによって誘起される重力場だけの作用は，また一般座標不変性から，宇宙項と，微分の最低次はEinstein–Hilbert作用である．また，高次の微分項も一般座標不変な項であり，それらは低エネルギー有効理論としての重力場の量子効果で出る量子補正と同じ意味でくり込みできる項である．しかし，宇宙項の‘くり込み’のための相殺項は，少なくとも44桁，下手をすれば120桁の微細調整を必要とするものなので，それがあらかじめ基礎理論で用意されているとは考えられない，と上で説明したのである．

3.5 真空エネルギーは宇宙項として働くのか？

当り前のことだが，真空エネルギーが宇宙項として働くことを「明示的に」示しておこう．

そもそも，真空エネルギーであろうがポテンシャル V であろうが，すべてのスカラー量 S は，一般座標不変なEinstein重力理論の中では，作用積分には，不変体積要素 $d^4x\,\sqrt{-g}$ との積の形

$$\int d^4x\,\sqrt{-g}\,S$$

で現れる．ただし，g は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の行列

式 $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ である．Higgs 場のポテンシャル $V(\Phi)$ も $S = -V(\Phi)$ の形で作用積分に現れているが，それが真空期待値 $\langle V(\Phi)\rangle = c$ を持てば，文字通り，宇宙項 $\int d^4x\,\sqrt{-g}\,(-c)$ を生成する．

もっとダイナミカルな効果で現れるカイラル凝縮を議論しよう．QCD のクォークの運動項は，Einstein 重力理論の背景場の中では，四脚場 ${e_\mu}^a$ を用いて，

$$\int d^4x\, e\, \bar{q}(i{e_a}^\mu \gamma^a \partial_\mu - \sigma)q \tag{6}$$

と書かれる．四脚場は，計量 $g_{\mu\nu}$ のルート，$g_{\mu\nu} = {e_\mu}^a \eta_{ab} {e_\nu}^b$, である．ここで Einstein 重力理論の四脚場が，スカラー密度因子 $e \equiv \det({e_\mu}^a) = \sqrt{-g}$ 以外に，運動項 $\bar{q}(i\gamma^a\partial_\mu)q$ の，γ^a-行列の平坦ベクトル添え字 a と座標微分 ∂_μ の世界ベクトル添え字 μ とを縮約すべく，（四脚場の逆行列）${e_a}^\mu$ が現れていることにも注意したい．我々の日常スケールからすれば遥かミクロなクォークの世界でも，その運動項を書くためには**計量ないしは四脚場が必要**で，それが我々の日常経験する Einstein 重力場と同じものか？という問題は，自明なことではないと思うが，それを違うものとして導入することも難しい．とにかく，(6) の運動項があれば，クォークの量子効果（ループグラフ）により誘起される重力場の作用関数は，場の微分の個数で展開して，0 次が宇宙項，2 次が Einstein–Hilbert 項，4 次が 3 種類の R^2 項，等々，となる．場の微分を一つも含まない宇宙項の計算は特に簡単で，あたかも場が x に依存しない定数として計算して良い．その場合 (6) のクォークの 1 ループグラフの総和は，

$$-\int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \ln\det[e(\gamma^a {e_a}^\mu k_\mu - \sigma)]$$

で与えられるが，${e_a}^\mu$ で‘回転’した運動量 $p_a \equiv {e_a}^\mu k_\mu$ に変数変換すれば，$k_\mu = {e_\mu}^a p_a$ だから

$$d^4k = \det\left(\frac{\partial k_\mu}{\partial p_a}\right) d^4p = e\, d^4p \tag{7}$$

だから，平坦な（重力場がない）場合の真空エネルギー $V(\sigma) = -\int (d^4p/i(2\pi)^4) \ln\det[\gamma^a p_a - \sigma]$ の e 倍の作用積分 $\int d^4x\, e\, V(\sigma)$=宇宙項を与えることがわかる．

4. 結び

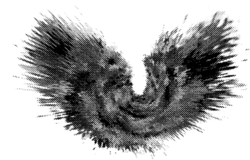
以上，宇宙項問題についていくつか基本的・初等的な側面を見てきた．この問題は大変明確で基本的なものだが，どこに解決の糸口があるのかなかなかわからない．Einstein 重力理論も標準理論の場の理論のほうも，どちらも盤石でどこにも瑕疵がないように思える．この問題に古くから取り組んでいる Weinberg は，「人間原理」に傾いているようである．しかし，人間原理は説明放棄の原理でもあるわけで，それは最後の逃げ道に過ぎない．筆者は，もっと何か初等的な見落としをしているのではないかと思う．昔，益川敏英さんがミクロレベルの重力は“シールド”されてマクロなそれとは違っている，とおっしゃっていたが，やはりミクロなレベル（例えば QCD の 1 fm スケール）の計量 $g_{\mu\nu}$ や四脚場 ${e_\mu}^a$ は，我々の 1 m スケールのそれらとはかなり違うものではないのか？と思う．あるいは，もっと意外な革新的なアイデアが必要なのかもしれない．最後に，解決に向けたこれまでの多くの試みを紹介した講義の類[10]を二三あげておいて筆を擱くことにする．

参考文献

1) 中西襄，「数理科学」1993 年 10 月号，78–84（臨時別冊数理科学「20 世紀の物理学」212–220（1998 年 9 月）に再録）およびそこに引用の文献．
2) T. Kugo, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **188** (2011), 1.
3) 橋本幸士：『D ブレーン：超弦理論の高次元物体が描く世界像』（東京大学出版会，2006）．
4) N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *Nucl. Phys. B* **498** (1997), 467 [hep-th/9612115].
5) S. Weinberg, *Phys. Rev.* **138** (1965), B988.
6) 九後汰一郎：『ゲージ場の量子論 II』，p.13（培風館，1989）．
7) 九後汰一郎：『ゲージ場の量子論 I』，p.124（培風館，1989）．
8) S. Weinberg, *Physica A* **96** (1979), 327.
9) N. Nakanishi and I. Ojima, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979), 91.
10) S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989), 1; S. Nobbenhuis, gr-qc/0609011; J. Martin, *Comptes Rendus Physique* **13** (2012), 566 [arXiv:1205.3365 [astro-ph.CO]].

（くご・たいちろう，京都産業大学益川塾）

多彩な天体現象と重力



井岡 邦仁

1. 重力が司る宇宙

重力は宇宙において本質的な役割を果たしている．宇宙には実にさまざまな天体現象が存在し，中には我々の想像を遥かに超えるような極限的な現象もある[1]．これらの多くはまだまだ謎に包まれているが，要は重力エネルギーがどのように変換されているのかが分かっていないと言っても過言ではない．

密度–大きさの図 1 に宇宙の構成要素をプロットしてみよう．まず我々人間がいる．我々は**太陽系**に住んでいて，太陽系は**銀河系**の一員である．そして**銀河**や**銀河団**は我々が観測できる宇宙に広がっている．また宇宙には非常に密度の高い**白色矮星**や**中性子星**といった天体も存在する．一方，我々より小さい素粒子の世界は，分子，原子，原子核，核子，クォークなどへと続いている．

これらの宇宙と素粒子を記述する基礎理論は一般相対論と量子論である．一般相対論における典型的な大きさは，物理定数 G と c を用いて質量を長さの次元に変えると[*1]，

$$R \sim \frac{2GM}{c^2} \sim 3\ \mathrm{km}\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \tag{1}$$

となる（$M_\odot \sim 2 \times 10^{33}$ g は太陽質量）．これは正に**ブラックホール**の半径である．これから密度–大きさ関係は

$$\rho \sim \frac{M}{R^3} \sim \frac{c^2}{G}\frac{1}{R^2} \tag{2}$$

である．図 1 より，宇宙の構成員はこの関係に近いことが分かる．つまり宇宙では重力が極めて重要である．一方，量子論の基礎は**不確定性原理**

$$\Delta x\, \Delta p > \hbar \tag{3}$$

である．これを密度–大きさ関係に変形すると

$$\rho \sim \frac{m}{(\Delta x)^3} > \frac{\Delta p/c}{(\Delta x)^3} > \frac{\hbar}{c}\frac{1}{(\Delta x)^4} \tag{4}$$

となる．この関係は図 1 で素粒子に近い．つまり素粒子の世界では量子論が支配的になる．

重力は打ち出の小槌のようにエネルギーを生み出す．簡単な例として，質点 M の周りのテスト質

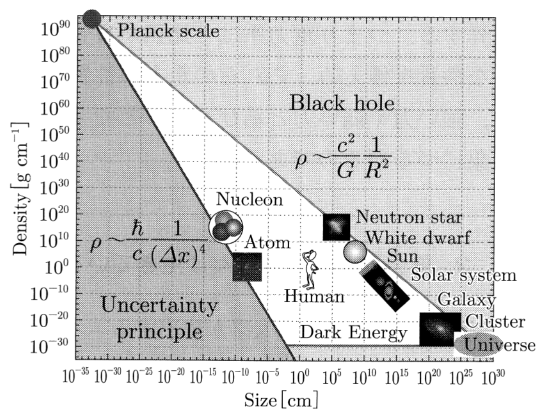


図 1 密度と大きさ．宇宙の構成要素はブラックホールになる線に近く，重力が重要になる．

*1） 宇宙では値が何桁にも及ぶので，数因子を気にせずオーダー評価をよく行う．そのとき = ではなく ∼ を用いる．

量 m の円運動を考えよう．この系の重力エネルギーは $E_\mathrm{g} = -GMm/r$ である．また，重力 $F_\mathrm{g} = GMm/r^2$ と遠心力 $F_\mathrm{c} = mv^2/r$ が釣り合うので，運動エネルギーは $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = GMm/2r$ である．従って全エネルギー

$$E = E_\mathrm{g} + E_\mathrm{k} = -\frac{GMm}{2r} \tag{5}$$

は大きさ r が小さくなれば減少する．つまり**系が潰れるとエネルギーが解放される**．また，系のエネルギーが解放されると，温度（運動エネルギー）

$$kT \sim \frac{1}{2}mv^2 \sim \frac{GMm}{2r} \tag{6}$$

は上昇する．つまり重力系は「**比熱が負**」という奇妙な性質を備える．これらの重力の性質が電磁気力，強い力や弱い力と結びつくことで多彩な天体現象につながるのである．

2. 重力のおかげで我々は生きている

我々が活動できるのは太陽が放出するエネルギーのおかげであるが，太陽が輝くには重力は必須である．仮に重力がなくなると，(6) 式に $M = M_\odot$, $r = R_\odot \sim 7 \times 10^{10}\,\mathrm{cm}$（太陽半径），$m = m_\mathrm{p} = 1.7 \times 10^{-24}\,\mathrm{g}$（陽子質量）を代入して $v \sim (GM/r)^{1/2} \sim 10^7\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$ となるので，太陽は

$$\frac{r}{v} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \sim 1\ \mathrm{hr}\left(\frac{\rho}{1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}}\right)^{-1/2} \tag{7}$$

で膨張して散失してしまう．一般に，自ら輝く恒星は，潰れようとする重力と膨張しようとする圧力勾配が釣り合った系で，重力によって星の中心が高温，高密度に保たれている．そこで核融合が可能になり**原子核エネルギー**が解放されているのである．例えば，水素原子 4 つがヘリウム原子 1 つに核融合すると，質量が減るため，アインシュタインの有名な式 $E = mc^2$ に従って，静止エネルギーの 0.71% が解放される．エネルギー的に最も安定な鉄まで行くと静止エネルギーの 0.9% が得られる．

ここで，比熱が負という重力の性質によって，星の中の**元素合成**がうまく進むことに注意したい．

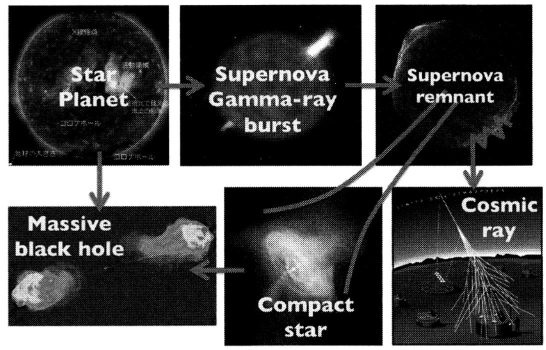


図 2　重力による星の進化.

例えば，中心の水素が燃え尽きると圧力が下がるので，星は重力を支えきれなくなって収縮する．すると (6) 式に従って温度が高くなるので，ヘリウムが炭素に燃焼できる．一般にクーロン反発によって重い原子核ほど核融合が起こる温度は高い．星が収縮して温度が上がることで，酸素やネオン，マグネシウム，シリコン，鉄などが順に合成される．仮に比熱が正だと温度が上がらない．つまり，重力の性質のおかげで我々の体を構成する元素ができたのである．これらの重元素は図 2 のように超新星爆発などで外界に放出され，その一部が我々を形作っている．我々はかつて星の中にいて超新星爆発を経験していたとは少し驚きではないだろうか．

星は最初から宇宙に存在していたわけではない．宇宙の平均ガス密度 $\sim 10^{-31}\,\mathrm{g\ cm^{-3}}(1+z)^3$ から星の密度 $\sim 1\,\mathrm{g\ cm^{-3}}$ まで実に 30 桁近くも重力によって圧縮されたのである（z は赤方偏移）．一般に大きさ r を小さくするには，(5) 式より，系からエネルギーを抜く必要がある．例えば，銀河系にはバリオンなど観測されている物質以外に，その 10 倍程度，見えない**ダークマター**が存在すると考えられているが，ダークマターは光などでエネルギーを放出できない．それゆえ星に潰れることができず，銀河系の周りをハローとして漂う．星形成に於いても，エネルギーを抜く冷却過程が異なると，生まれる星の質量が変わってくる．特に，炭素などの重元素がまだ存在しない太古の宇宙では冷却過程が全く異なる．それゆえ宇宙の一番星は，太陽の数十倍から数百倍も重かった可能性が

ある．重元素を含まないガスから生まれる星は**種族III星**と呼ばれ，その発見競争が始まっている．

3. 重力がものすごく強い天体

星がエネルギーを放射すると (5) 式の重力の性質により星は収縮する．星はそのままブラックホールになるのであろうか？ 実はその前に**縮退圧**という量子力学的な効果が重要になってくる．(3) 式の不確定性原理によると密度が上がって電子間の距離 Δx が小さくなると電子の運動量 $\Delta p \sim \hbar/\Delta x$ が大きくなる．これが縮退圧を生み出す．電子が非相対論的な場合，実効的に速度が $v \sim \Delta p/m_{\mathrm{e}} \sim \hbar/m_{\mathrm{e}}\Delta x$ なので，圧力項（運動エネルギー，(6) 式の左辺参照）は

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{e}}v^2 \sim \frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{e}}(\Delta x)^2} \propto \frac{1}{(\Delta x)^2} \tag{8}$$

に比例する．一方，重力項（(6) 式の右辺参照）は，簡単のため星が水素からなるとすると全粒子数が $M/m_{\mathrm{p}} \sim (r/\Delta x)^3$ なので，

$$\frac{GMm_{\mathrm{p}}}{2r} \sim \frac{GMm_{\mathrm{p}}}{2(M/m_{\mathrm{p}})^{1/3}\Delta x} \propto \frac{1}{\Delta x} \tag{9}$$

に比例する．つまり粒子間隔 Δx が小さくなると，縮退圧 (8) が重力 (9) に勝って星を支えることができる．電子の縮退圧で支えられた星は白色矮星と呼ばれる．その密度は，電子のド・ブロイ波長 $\Delta x \sim \hbar/m_{\mathrm{e}}v$ に陽子が一つ存在するので，

$$\rho \sim \frac{m_{\mathrm{p}}}{3\pi^2(\hbar/m_{\mathrm{e}}v)^3} \sim 10^6\,\mathrm{g\ cm^{-3}}\left(\frac{v}{c}\right)^3 \tag{10}$$

である．なんと角砂糖が ~ 1 トンになる．

一見，縮退圧はどんな重さも支えられるように見える．しかし，縮退圧を担う粒子が相対論的になると話が違ってくる．圧力項（運動エネルギー）が，非相対論的な (8) 式から相対論的な

$$c\Delta p \sim \frac{\hbar c}{\Delta x} \propto \frac{1}{\Delta x} \tag{11}$$

に変わる．これは重力項 (9) と Δx への依存性が同じになるので，密度が上がっても縮退圧と重力の大小関係は変わらない．特に，質量が

$$M \sim \frac{1}{m_{\mathrm{p}}^2}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} = \frac{m_{\mathrm{pl}}^3}{m_{\mathrm{p}}^2} \sim 1.5\,M_{\odot} \tag{12}$$

を超えると，重力 (9) が縮退圧 (11) を常に凌駕する．逆に，この質量を下回るブラックホールは星の進化から生まれない．プランク質量 m_{pl} と陽子質量 m_{p} という物理定数から得られる (12) 式は**「チャンドラセカール質量」**と呼ばれ，重要な質量スケールを与える（1983 年にノーベル賞）．

中性子星では中性子の縮退圧が電子の縮退圧に勝る．中性子がそのド・ブロイ波長に一つ存在すると，密度は

$$\begin{aligned}\rho &\sim \frac{m_{\mathrm{n}}}{3\pi^2(\hbar/m_{\mathrm{n}}v)^3} \\ &\sim 6\times 10^{15}\,\mathrm{g\ cm^{-3}}\left(\frac{v}{c}\right)^3\end{aligned} \tag{13}$$

になる．原子核密度 $\rho \sim 3\times 10^{14}\,\mathrm{g\ cm^{-3}}$ を超えると核力が重要になり，中性子星の最大質量や**状態方程式**に影響する．しかし量子色力学の第一原理計算が難しく，中性子星の中身は良く分かっていない．2010 年には $2M_{\odot}$ の中性子星が発見され，それを支えられない状態方程式が数多く棄却された．状態方程式が分からなければ中性子星がブラックホールに潰れるかどうか分からない，と思われるかもしれない．しかし一般相対論は，どんな状態方程式でも，3–5$M_{\odot}$ の最大質量を導く[2)]．これは一般相対論では圧力が重力の源になるからである．

ブラックホールの周りを回る質点の運動は一般相対論とニュートン重力では決定的な違いがある．ニュートン重力では，(5) 式のように，どれだけ中心に近づいても常に重力と遠心力が釣り合う軌道が存在する．図 3 のように，これは有効ポテンシャルが中心付近で角運動量バリアを持つというように解釈できる[2)]．ところが，一般相対論では中心付近 (1) での重力が強くなりバリアが消失する．有効ポテンシャルの極小点が円軌道に相当するが，角運動量を失い軌道が中心に近づくと，ついに安定軌道がなくなりブラックホールに落下する．これを**最内安定円軌道**と呼ぶ．最内安定円軌道までに解放される重力エネルギーは，回転しないブラックホールの場合，静止質量の 6%，回転す

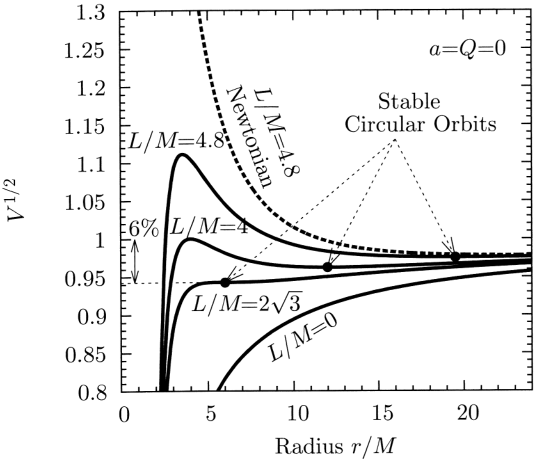


図 3 ブラックホールの有効ポテンシャル．L/M は質量で規格化した角運動量．

る場合，最大 42% に達する．これは原子核エネルギーの最大 0.9% に比べて圧倒的に大きい．ブラックホールは最強のエンジンなのだ．

4. 重力が引き起こす大爆発

太陽よりも比較的重い星は**超新星爆発**という華々しい爆発で最期を迎える（図 2 参照）．星が進化して核融合が鉄まで進むと，それ以上原子核エネルギーを取り出せなくなる．さらに重力の性質 (6) により温度が上がるので，鉄が光崩壊し始める．これが吸熱反応なので圧力が下がり，重力崩壊が始まる．中心の密度は (7) 式の短い時間で一気に上昇し，ついには核密度に達する．すると核力によって急激に落下が止められるので，落ちてくる物質を跳ね返し衝撃波が外に伝搬する．衝撃波が最終的に星の表面を突き破ると超新星爆発になる．爆発エネルギーは中心にできる原始中性子星の重力エネルギーで決まり，

$$|E| = \frac{GM^2}{2r} \sim 10^{53}\,\mathrm{erg}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{r}{10\,\mathrm{km}}\right)^{-1} \quad (14)$$

に達する．このほとんどは $\sim 10\,\mathrm{MeV}$ 程度の**ニュートリノ**として解放される．密度が高いのでニュートリノといえど自由に出て来れず，~ 10 秒ぐらいかけて原始中性子星から放射される．大マゼラン星雲で起こった超新星 1987A からのニュートリノを小柴昌俊氏率いるカミオカンデが検出し，この基本描像が観測的にも確立した（2002 年にノーベル賞）．超新星残骸の中心には中性子星かブラックホールが残る（図 2 参照）．超新星爆発は一つの銀河で 30–100 年に 1 回起こるのでもうすぐ我々の銀河系で起こるかもしれない．

理論的には超新星爆発を数値計算で再現しようと努力が続けられている．外側に伝搬する衝撃波は，それまで百万年以上かけて作った鉄を一瞬で壊しながら進む．この過程で衝撃波はエネルギーを失い途中で停滞する．現在最も有力視されているシナリオは，ニュートリノが停滞衝撃波を加熱し復活させる**ニュートリノ加熱機構**である．観測される超新星爆発の運動エネルギーが $\sim 10^{51}\,\mathrm{erg}$ なので，ニュートリノのたった $\sim 1\%$ のエネルギーが物質に渡れば良い．最初の J. Wilson (1982) の計算は幻であったと考えられるが，最近，スーパーコンピューターで対流や長時間の計算が可能になり，ついに爆発するモデルが出てきている．ただ，運動エネルギーが一桁ほど足りず，まだ完全な理解に至っていない．

超新星爆発は大質量星の重力崩壊だけでなく，白色矮星の核爆発でも起こる．この場合，エネルギー源は重力エネルギーではなく，原子核エネルギーである．この **Ia 型超新星**は比較的明るさが一定なので標準光源として用いられ，宇宙の加速膨張の発見につながった（2011 年にノーベル賞）．核爆発のきっかけが，白色矮星と白色矮星の連星の合体か，白色矮星と通常の星の連星における質量降着か，で論争が続いている．

宇宙には通常の超新星爆発よりも明るいとてつもない爆発が存在する．それは**ガンマ線バースト**と呼ばれる現象で，太陽が一生かけて放出するエネルギーを数秒の間にガンマ線で放出してしまう宇宙一明るい大爆発である[1,3]．2003 年にガンマ線バーストに付随する超新星爆発がスペクトルで確認され，~ 1000 個に 1 つの特殊な大質量星の重力崩壊に伴ってガンマ線バーストが起こることが

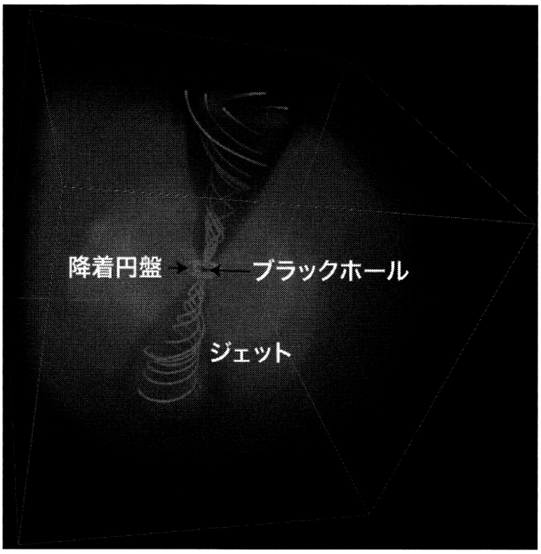


図 4　Blandford–Znajek 機構の数値計算[4]（文献[4]に加筆）.

明らかになった．ガンマ線は星の中から出て来れないので，ジェットが星を突き破った後にガンマ線を放出する**崩壊星（collapsar）**モデルが考えられる．ジェットの中でもガンマ線が $\gamma\gamma \to e^+e^-$ で電子陽電子を作ると出て来れないので，これを避けるために，ジェットの**ローレンツ因子**が

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 100, \tag{15}$$

つまり $v > 0.9999c$ という超相対論的なジェットが必要になる．2008 年に Fermi 衛星が GeV (10^9 eV) ガンマ線を観測したが，それには $\Gamma > 300$ が必要になる．

我々はガンマ線バーストの観測でブラックホールの形成の瞬間を目の当たりにしているのかもしれない．しかし，ブラックホールがどのように $\Gamma > 100$ のジェットを作って，それがどのようにガンマ線を放出するのかは大きな謎となっている．当然ブラックホールだけでは何も出ないので，周囲に**降着円盤**ができているはずである．最も有力な説の一つは，図 4 のようにブラックホールの回転エネルギーを磁場で引き抜く **Blandford–Znajek 機構**である．この場合，ジェットが主に磁場からなるが，ガンマ線への散逸過程が問題になる．

ブラックホールからのジェットは，スケールは全く違うが，銀河の中心に存在する 10^6–$10^9 M_\odot$ の巨大ブラックホールがジェットを放出する**活動銀河核**（図 2 参照）や，銀河系内の $\sim 10 M_\odot$ のブラックホールがジェットを放出する**マイクロクエーサー**などでも実現されている．

5. 重力が生み出す高エネルギー天体

超新星爆発やガンマ線バーストなどで解放された重力エネルギーは，爆発エネルギーや中心天体の回転エネルギーなどに転嫁されるが，一部は非常に高エネルギーの粒子を生成する[1]．**粒子加速**機構として有名なのが，衝撃波での**フェルミ加速**である．衝撃波とは物理量が不連続に変化する所で，特に流体が衝撃波を通過すると速度が遅くなる．すると上流から見ると下流は近づいてくるし，下流から見ると上流が近づいてくることになる．そこを荷電粒子が磁場などで散乱されながら行ったり来たりすると，間が狭くなる壁の間のピンポン球のように，エネルギーを毎回獲得して加速する（図 2 参照）．エネルギー増加率はエネルギーに比例し，粒子はポアソン的に下流に逃げていくので，

$$\frac{dE}{dt} = \frac{E}{t_{\rm acc}}, \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{N}{t_{\rm esc}} \tag{16}$$

に従う．少数 $N \propto \exp(-t/t_{\rm esc})$ の粒子に莫大なエネルギー $E \propto \exp(t/t_{\rm acc})$ が注入されることで，加速粒子のスペクトルは

$$\frac{dN}{dE} \propto \frac{dN}{dt}\frac{dt}{dE} \propto E^{-\left(1+\frac{t_{\rm acc}}{t_{\rm esc}}\right)} \tag{17}$$

とベキ型になる．その他の粒子加速機構としては**単極誘導**がある．重力から生じる中心天体の回転と磁場があると，回転する磁石なので発電して電位差を生み粒子加速する．特に，$\sim 10^{12}$ G の磁場を持ち周期ミリ秒〜秒で回転する中性子星は**パルサー**として輝く．超強磁場 $\sim 10^{14}$ G の中性子星も 1998 年に発見され**マグネター**と呼ばれる．これらの粒子加速機構では，加速器の大きさ r がラーマー半径 E/ZqB よりも大きいという **Hillas 条件**

$$E < ZqBr \sim 10^{15}\,\mathrm{eV}\left(\frac{B}{1\,\mu\mathrm{G}}\right)\left(\frac{r}{1\,\mathrm{pc}}\right) \quad (18)$$

を満たす必要がある．

観測されている GeV–PeV（$=10^{15}$ eV）の**宇宙線**は，超新星爆発が周りの星間物質を掃いてできる衝撃波で加速されたと考えられている．PeV を超える宇宙線も観測されているが起源はまだ不明である．特に $\sim 10^{20}$ eV（地上の加速器の ~ 1000 万倍のエネルギー！）の**超高エネルギー宇宙線**を加速するには，Hillas 条件 (18) から活動銀河核，ガンマ線バースト，銀河団，高速回転パルサーなどの極限天体に候補が絞られるが，その起源ははっきりしない．また，超高エネルギー宇宙線の組成が鉄なのか陽子なのかで論争が続いている．

加速された宇宙線はさまざまな高エネルギーの二次粒子を生成する．例えば，ガンマ線は大別して**レプトン過程**と**ハドロン過程**でできる．加速された電子が周りの光子を逆コンプトン散乱するレプトン過程や，加速された陽子が周りの陽子や光子と衝突してパイ中間子を作り，その崩壊 $\pi^0 \to \gamma\gamma$ でガンマ線を作るハドロン過程などがある．ハドロン過程は同時にニュートリノも生成する．pp 衝突や $p\gamma$ 反応で $\pi^{\pm}$ ができ，その崩壊

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu \to e^+ + \nu_{\mathrm{e}} + \bar{\nu}_\mu + \nu_\mu \quad (19)$$

でニュートリノができる．元の粒子が高エネルギーなのでニュートリノも高エネルギーになる．2012 年に IceCube が PeV ニュートリノの検出を報告し，ついに**高エネルギーニュートリノ天文学**が始まった．PeV ニュートリノの起源が何なのか大変興味深い．二次宇宙線としては陽電子などの**反粒子**も生成される．2008 年に PAMELA 衛星が陽電子宇宙線の超過を確認し，その起源が高エネルギー天体なのか，それともダークマターなのかで大問題になった．ダークマター粒子は質量が重い可能性があり，その対消滅や崩壊で高エネルギー粒子が生成され得る．

2013 年に発見された**高速電波バースト**は全く謎に包まれている．電波で最も明るい天体であるにも関わらず，図 5 のようにミリ秒しか輝かないの

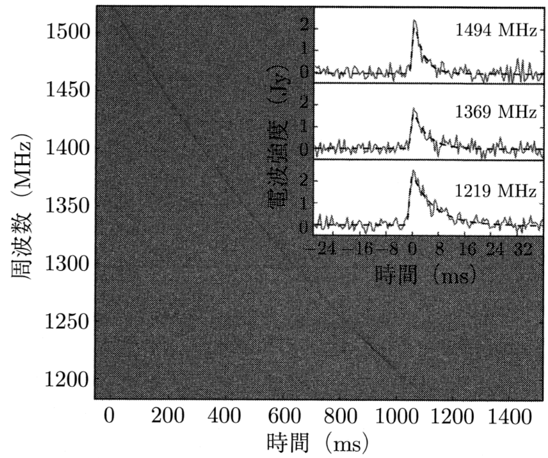


図 5　謎の高速電波バースト（文献[5]を一部改変）．低周波数での到着時間の遅れは宇宙論的距離を示唆する．

でこれまで全く見逃されていた．全エネルギーは $E \sim 10^{40}$ erg と超新星爆発よりかなり小さいが，黒体放射を仮定して輝度温度を求めると $T \sim 10^{35}$ K にも達する．多数の荷電粒子が同時に運動するコヒーレント過程が考えられるが，同様の過程が働くパルサーより圧倒的に明るい．頻度は超新星爆発の 1/10–1/100 と比較的高い．一体正体は何なのか？ 21 世紀に入ってまだこのような発見があるとは宇宙の奥深さに驚かざるを得ない．

6. 重力波天体

重力波で宇宙を探る新たな時代が始まろうとしている．天体の重力場が変動すると，有限の速度（一般相対論では光速）で情報が伝わるので，時空の歪みが重力波として伝搬する．振幅 h の重力波はある二点間の距離 cT を $c\Delta T \sim hcT$ だけ変化させる．その微小な変化をレーザー干渉計で測定するのだ．重力波の初の直接観測を目指して，LIGO（米），VIRGO（欧），KAGRA（日）といった第二世代の重力波望遠鏡の完成が間近に迫っている．

一般相対論では**潮汐場**（ある方向を引っ張り，直交する別の方向を押し潰す力）が本質的なので，四重極モーメント $Q_{ij} = \int \rho \left(x_i x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} r^2\right) dV$

の時間変化が重力波の振幅

$$h_{ij}=\frac{2G}{c^4}\frac{1}{d}\frac{d^2Q_{ij}}{dt^2}\sim\frac{GM/c^2}{d}\frac{v^2}{c^2}$$
$$\sim 10^{-22}\left(\frac{200\,\mathrm{Mpc}}{d}\right)\left(\frac{M}{3M_\odot}\right)\left(\frac{v}{0.3c}\right)^2 \quad (20)$$

を決める．球対称な変化では $Q_{ij}=0$ なので重力波は出ない．系の大きさがブラックホール (1) に近いほど，(6) 式より速度 v が光速 c に近づくので，重力波の振幅は大きくなる．従って，中性子星連星*2) や連星ブラックホールなどコンパクト連星の合体が最も有力な重力波天体となる．特に連星中性子星は銀河系内ですでに発見されており，その合体率が超新星の $\sim 1/100$ 程度と見積もられている．第二世代重力波望遠鏡が観測できる $d \lesssim 200\,\mathrm{Mpc}$ では年間 ~ 10 合体が期待される．実際，PSR B1913+16 の観測では，連星の軌道変化が重力波放出から予想される理論値と一致し，重力波の存在が間接的に証明された（1993 年にノーベル賞）．その他，強力な磁場で変形したマグネターも重力波の源になり得る[6]．

重力波の直接観測が間近に迫り，重力波天体が他のメッセンジャー，つまり光子（電波，光赤外，X・ガンマ線），ニュートリノや宇宙線，でどう見えるのかという問題が面白くなっている．**対応天体**が発見されると以下のようなさまざまな進展が期待される．[1] 重力波の方向決定精度が $\Delta\theta \sim 10$ 度で悪いという弱点を補える．[2] 継続時間の短いガンマ線バーストの起源に迫れる．長いガンマ線バーストは崩壊星が起源だが，短いガンマ線バーストは中性子星連星の合体が有力視されている．[3] **重力波宇宙論**が可能になる．対応天体が見つかれば赤方偏移が決まり，連星からの重力波は Ia 型超新星のように標準音源となるので，合わせると宇宙の膨張則を調べることができる．[4] 重力波が光速で伝搬するかどうかを検証できる．[5] 中性子星の状態方程式を制限できる．[6] 元素の起源に迫れる．[6] の点に関して最近大きな進展があった．まず中性子星連星が合体すると**質量放出**する

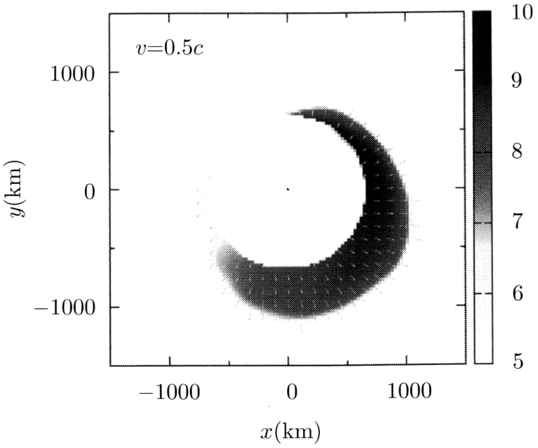


図 6　ブラックホール・中性子星連星の合体後に脱出速度を超えて放出される物質[7]．

ことが数値相対論で分かった（図 6 参照）．質量は $M \sim 0.01\,M_\odot$ と小さいが，$v \sim 0.2c$ と高速なので，エネルギーは $Mv^2 \sim 10^{50\text{–}51}\,\mathrm{erg}$ と超新星並である．しかも放出物質に中性子が多いので，膨張して温度が下がると互いにくっつき金やレア・アースなどの **r-過程元素**を合成する．多くが放射性元素なので，超新星爆発がニッケルの崩壊で輝くように，**巨新星（macronova）**が生じると予想され，それが実際に観測されたのである[8]．筆者は r-過程元素ではなくダストができて光っているのではないかとまだ懐疑的だが[9]，今後の大発展を予感させる非常に面白い発見である．

*2)　連星中性子星は中性子星・中性子星の連星を指すが，中性子星連星は中性子星・ブラックホールなども含む．

参考文献

1)　小玉英雄，井岡邦仁，郡和範：『宇宙物理学』（KEK 物理学シリーズ 3），共立出版 (2014).
2)　S.L. Shaprio and S.A. Teukolsky: *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, WILEY-VCH (2004).
3)　小山勝二・嶺重慎：シリーズ現代の天文学 8『ブラックホールと高エネルギー現象』，日本評論社 (2007).
4)　J.C. McKinney and R.D. Blandford: *MNRAS* **394**, L126 (2009).
5)　D. Thornton, *et al.*: *Science* **341**, 53 (2013).
6)　K. Kashiyama and K. Ioka: *Phys. Rev. D* **83**, 081302 (2011); K. Ioka: *MNRAS* **327**, 639 (2001).
7)　K. Kyutoku, K. Ioka, and M. Shibata: *Phys. Rev. D* **88**, 041503 (2013).
8)　N.R. Tanvir, *et al.*: *Nature* **500**, 547 (2013).
9)　H. Takami, T. Nozawa, and K. Ioka: *ApJ Letters* **789**, L6 (2014).

（いおか・くにひと，高エネルギー加速器研究機構）

宇宙を通じた重力研究の過去，現在，未来



佐藤 勝彦

重力は私たち人間にとってもっともなじみの力である．ニュートンはリンゴの落下から万有引力の法則に気づいたと語られているが，落下の現象，物体は高いところから低いところに落下することは，動物だって知っている．人間の赤ちゃんはもちろん，動物の赤ちゃんだって，生きていくに不可欠なものとして体で身につける．しかし，この特集が組まれたように，物理学者にとって重力ほどよく解明されていない，ミステリアスな力は他にない．

重力がきちんとした定量的法則となったのは，歴史が語るように，宇宙の観測，天文学のおかげである．チコ・ブラーエの長年にわたる惑星の位置観測に基づき，ケプラーはケプラーの3法則を導いた．ニュートンは，自ら定式化した運動の法則に加えて惑星と太陽の間に距離の二乗に反比例し，両者の質量に比例する力を仮定すればケプラーの法則が導かれることを示したのである．そして，その力は天上世界を支配しているだけでなく，地上で物体が落下する現象の法則であることを示したのである．天王星軌道の乱れから，未知の惑星が存在すると考えられるようになったが，アダムズとルヴェリエが予想軌道を算出し，そこに新たな惑星，海王星が発見された．天上世界，地上世界を含む物質世界は，数式で記述される確固とした法則，物理法則によって動いているのだということを示し，ここに近代物理学が誕生したのである．18世紀，力学体系はラグランジュ，ハミルトンなどによって数学的に美しい，解析力学として定式化された．私は大学初年で解析力学を学んだときその美しさに感動した．

今日，重力は一般相対性理論によって記述される．アインシュタインが示したように，重力場の方程式は単純な2つの原理，重力と加速度系の慣性力は等価という「等価原理」，物理法則は一般座標変換に対して共変でなければならないという「一般相対性原理」から導かれる．私は解析力学を学んだとき以上に，この世界のあり方，運動を決めている物理法則はどうしてこんなに単純で美しいのかと感嘆した．

アインシュタインは最終的に1915年11月25日に正しい場の方程式に到達する．この寸前まで試行錯誤，苦闘していたが，そのときの一つの大きな指針が，水星の近日点移動を正確に説明できるかということであった．そしてこの日，重力場の方程式の論文と同時に水星の近日点移動の論文も投稿しているのである[1]．このように一般相対性理論の成立に宇宙の研究は大きく寄与しているのである．さらに，あらゆる一般相対性理論の教科書に書かれているように，日食時の恒星の光の折れ曲がりが観測されたことにより，一般相対性理論は正しい理論として認知されたのである．一般

相対性理論は物的存在すべてを含む時空のあり方や運動を記述する初めての法則であり，これによって現代宇宙論が生まれた．相対論的宇宙論，ビッグバン宇宙論は宇宙論的観測結果を説明し，今日揺るぎない理論となっている．また，一般相対性理論だけでは説明が困難なビッグバン宇宙の起源も素粒子の理論と一般相対性理論を組み合わせて提唱された理論，インフレーション理論によって説明できると期待されている．1992年，米国NASAの宇宙背景放射観測衛星，COBE（Cosmic Background Explorer）は宇宙開闢38万年頃の宇宙の姿を描き出すことに成功した．そこにはインフレーション理論が予言する密度揺らぎが見事に描き出されていた．さらにCOBEの後継衛星，WMAP（Wilkinson Microwave Anisotropy Probe）はほぼ30倍の角度分解精度で観測し，さらにインフレーション理論を裏付けている．同時に一般相対性理論に基づいた解析によって宇宙の年齢，ダークマター，ダークエネルギーの量まで求めた．2003年に最初の結果が発表されたとき，私も含め多くの研究者は，どうしてこんなにも物理学の予言は開闢38万年頃の宇宙観測と一致するのだろうかと，感嘆したものである．

重力場の方程式の真空解としてブラックホールが予言され，天文観測で発見されている．しかしアインシュタインの予言，重力波は，天文学的な間接観測によって証拠付けされているが，まだ直接観測に成功していない．この特集にもあるように，まもなく直接観測も成功するにちがいない．

今日，重力研究の課題は量子的重力理論を作り上げることである．量子論と一般相対性理論の統合は，両者がそれぞれ成立したとき以来の課題であるが，超弦理論が可能性のある理論と言われているものの，成功していない．超弦理論の一つの予言，膜宇宙論は宇宙の初期には重力場の方程式が変形されることを示唆している．短距離重力も距離の逆二乗則からずれることも示唆している．さらにサスキントなどこの分野の専門家は物理法則がことなる別の宇宙が無数に存在するという．

目下，宇宙論の最大の謎は，現在の宇宙膨張を加速しているダークエネルギーの正体であろう．重力場の方程式では，空間が膨張してもエネルギー密度が薄まらないエネルギー，「真空のエネルギー」に対して重力は引力ではなく斥力として働く．発見当初，ダークエネルギーという言葉はなく「真空のエネルギーの発見」と報道された．真空のエネルギー密度 $\rho_{\rm v}$ と宇宙定数 Λ とは $\Lambda = 8\pi G\rho_{\rm v}/c^2$ という関係で結びつけられており，本質的に同じものである．宇宙定数はアインシュタインが，膨張も収縮もしない静的宇宙が万有引力で崩壊してしまわないように空間の斥力として重力場の方程式に加えたものである．宇宙初期で宇宙を加速膨張させたエネルギーの正体も不明で，仮の名前としてインフラトン場のエネルギーと呼ばれている．宇宙初期と現在の真空のエネルギー密度はおよそ100桁も異なるが，両者はより深遠な理論では結びつけられているにちがいない．現在，遠方銀河の観測によってダークエネルギーの解明を目指す研究が進んでいるが，その成果を期待したい．特に，極めて高視野であるすばる望遠鏡に新たに設置されたカメラ，Hyper Suprime-Cam の活躍を期待したい．

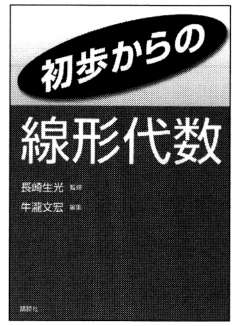
今年は一般相対性理論にとっては白寿の年である．来年は誕生から100年となる．誕生から100年の記念すべき年が一般相対性理論を内包する新たなより高い階層の法則発見へと，研究が加速する年となることを期待したい．

参考文献

1) A. パイス著，西島和彦監訳，『神は老獪にして…』，産業図書，1987年.

（さとう・かつひこ，自然科学研究機構）

初歩からの線形代数



長崎生光監修，牛瀧文宏編，A5 判，189 頁，本体 2200 円，講談社

2012 年度から始まった新しい高等学校学習指導要領によって，数学 C（2 単位）が廃止され，数学 III の単位数が従前の 3 単位から 5 単位に変更となりました．それに伴い数学 C で扱われていた「行列」が教科書からなくなり，2015 年度からは行列を知らない大学入学者が大半を占めることになります．

本書は，著者らの目指す「高等学校の教科書のいいところを取り入れる」構成により，初めて大学で線形代数を学ぶ学生にとって違和感なく読めるよう工夫された入門書です．特に，豊富な色使いを生かした読みやすいレイアウトによって，定義や定理，要点などが一目で分かるようになっており，カラー印刷が主流になっている高校数学の教科書と同じ感覚で読むことができるよう編集されています．

行列を知らない学生向けに書かれた類書は既に多く出版されていますが，そういった本で省略されがちな命題や定理の証明も丁寧に記述されています．その上で，基本的な項目と抽象的・発展的な項目とを「紫」と「緑」で色分けすることにより，手っ取り早く全体像をつかみたい読者や半期用の教科書として利用する際の利便も図られています．例題の解説は比較的簡素な書き方に止まっていますが，問や演習問題は約 180 問と豊富に用意されており，独習がしやすいよう詳しい解答がついています．

以下，具体的に内容を見てみましょう．

第 1 章「行列」では行列の定義，行列の和・スカラー倍・積，2 次行列の正則性が扱われます．行列の積に関する結合法則などの諸性質の証明を発展的な内容に配置し，具体例と計算によって行列に親しむことに主眼が置かれています．

第 2 章「数ベクトル空間」では実数を成分とする数ベクトルの 1 次独立や 1 次従属，標準的な内積が解説されています．ベクトル空間の公理はあえて登場させない一方，高校では指導要領外となっている空間の直線および平面のベクトル表示が説明されています．

第 3 章「行列式」では置換を用いた行列式の定義から始まり，行列式の諸性質が証明されます．また平行四辺形の面積や平行六面体の体積と行列式の関係，ベクトルの外積についても紹介されています．

第 4 章「連立 1 次方程式」では逆行列，掃き出し法，クラーメルの公式を用いた連立 1 次方程式の解法が解説されます．そしてこれまで考えてきた行列や行列式がどのように関係しているのか，詳しく述べられています．

ベクトル空間の公理は第 5 章「ベクトル空間」で初めて登場し，それに続いて部分空間や一般のベクトル空間における基底，次元の不変性が解説されます．これまでよりも抽象性が高い内容が多いため，章全体が発展的内容として扱われ，この章を飛ばしても第 7 章に無理なくたどり着けるようになっています．

第 6 章「線形写像」も，線形写像とその表現行列，平面上の線形変換を章の前半にコンパクトにまとめ，後半（像と核，基底の取り替えと表現行列の関係など）を読まなくても 7 章が読めるように工夫されています．

第 7 章「固有値と対角化」では固有値や固有ベクトル，行列の対角化ができる条件が扱われたあと，ハミルトン・ケーリーの定理や行列のベキ乗が紹介されています．微分方程式への応用もごく簡単に書かれています．

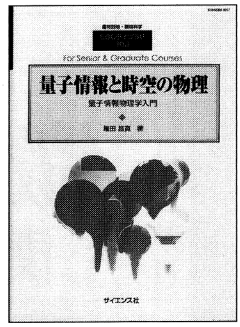
第 8 章「内積と 2 次形式」では，内積の性質，直交行列による実対称行列の対角化，2 次形式の標準化，複素内積空間，ユニタリ行列によるエルミート行列の対角化についてまとめられています．

全体的に大変丁寧に編集されていてとても読みやすいのですが，いくつかの図がやや不鮮明に印刷されているのが少し残念でした．また，これまでは高校で相当のページ数が割かれていた座標平面上の点の移動と線形変換について，本書はやや駆け足でまとめられている感があります．これらの点が改善されれば，想定されている読者層にとってより利用しやすい入門書になると思います．

本書で線形代数の基礎を学んだあとならば，本格的な線形代数の本へ手を伸ばすのも難しくないと思います．線形代数に初めて触れる人へのおすすめの一冊です．

原本　博史（愛媛大学教育学部）

量子情報と時空の物理
量子情報物理学入門



堀田昌寛著，B5 判，200 頁，本体 2457 円，サイエンス社

物理学では多くの場合，対象そのものの性質に興味をもつ．一方で，情報理論では，対象へ加える操作に着目する．この点が，物理になじんだ研究者が，量子情報をとっつきにくいと感じる一つの理由だろう．本書では，最初の 4 章で，物理学者向けに量子情報理論の基礎である量子情報と量子状態（1 章），量子測定（2 章），量子操作（3 章），量子もつれ（4 章）を解説している．量子情報論での独特な言葉使いが所々，無意識に使われてはいるものの，時間をかけて自分なりの言葉に置き換え読んでいくと，なるほどと思われる事実が述べられている．例えば，ある量子状態を完全に複製することは不可能である，という量子複製禁止定理（1 章）．証明の簡単さと，定理がもつであろう奥深さに思いをはせることができる．また，どれほど忠実に量子状態の近似複製が可能なのかが，量子系に対する操作の一例として 3 章で議論されている．この本で，私が一番面白かったのは 4 章である．量子もつれは，簡単な概念だが奥が深い．何をもって量子系がもつれていると定義するのかは，実はそれほど簡単ではない．量子もつれに 40 ページほどの分量が割かれ，丁寧に解説されている．物理屋の発想だと，量子もつれは，その状態の対象としての性質と考える．しかし，本書では，量子情報的な発想に基づき，量子的な操作との関係で議論されている．この見方は，私には斬新で面白かった．また，量子もつれの指標としてエンタングルメントエントロピーがよく知られているが，それ以外にも，ある種の量子操作で定義されるネガティビティとよばれる物理量が存在し，より一般的な有用性をもつことを，本書ではじめて知った．このような見方があることを知るだけでも本書の価値はあると思う．

5 章以降は，これら概念が様々な物理系に応用される．5 章では，短時間で繰り返される連続測定が量子系に与える「量子ゼノン効果」，特に一見パラドックスと思われる現象がどう解決されるかが議論されている．簡単にでも量子ゼノン効果の検証実験の紹介があるとよりわかりやすかった．

6 章と 7 章では，ウンルー効果とホーキング輻射を，量子もつれの観点から解説している．ウンルー効果とは，一様加速度運動する観測者が感じる有限温度効果をいい，この観測者に対して，光の速さを使っても情報伝達できない領域があることに起因する．ブラックホールの内側から，光すら外部へ脱出できないことと同じであり，地平面の内外での量子もつれが本質的な役割を果たす．6 章ではこの量子もつれのエンタングルメントエントロピーや，ネガティビティが議論されている．7 章では，「動いている境界があることで生じる真空中の輻射」を論じている．これは動的鏡模型とよばれ，ホーキング輻射とより密接に関係する．興味深いのは，この輻射と量子的にもつれている相手が，真空の 0 点振動そのものであることだ．このことは，我々が真空とよんでいるものが，それほど自明な状態ではないことを示しており，ブラックホール情報喪失問題の解決のみならず，暗黒エネルギーなどにも関係する可能性があり，重要な考え方である．

8 章と 9 章では，真空のもつ局所的なエネルギーが議論される．真空からエネルギーをとりだすことはできるか，これがここで検討される問題であり，著者の最も伝えたいテーマであろう．これについては，実際に本書を読んでもらうのが一番よい．全系のエネルギーが正定値でも，局所的領域に限定されたエネルギーは負となり得る．8 章では，この下限値を与えるフラナガンの定理が紹介されている．証明は簡単で，座標変換で生じるエネルギー運動量テンソルの補正，シュワルツ微分項を書き換えるだけなのだが，このような正定値量で書き直せることは面白い．

以上のように，本書は，時空でもつれた量子状態への応用を視野にいれた量子情報論の入門書であり，著者の考え方が随所に表れている．物理屋にとってなじみのない概念を知るにはよいだろう．また，この本を足がかりにして，参考文献や専門書にあたることもできる．私も，これまで敬遠していた量子情報理論をもう少し勉強してみようか，という気になった．

磯　暁（高エネルギー加速器研究機構）

例題形式で探求する 微積分学の基本定理
関数の性質から幾何構造を探る
第11回

面積分(3)

森田 茂之

11.1 ガウスの定理(続き)

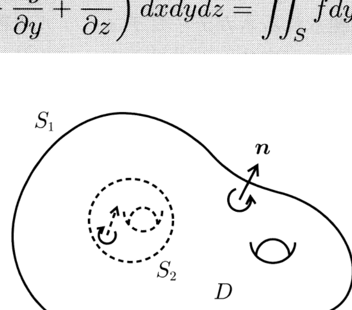
前回述べたガウスの定理を思い出しておこう.

定理 11.1(ガウスの定理) D を $\mathbb{R}^3$ 内のコンパクトな区域で，有限個の連結な閉曲面 S_i $(i=1,\cdots,k)$ によって囲まれているものとする(図 11.1 参照). 各閉曲面 S_i は右ねじの向きに出した法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が D から見て外側に出るように向き付けられているものとする. U を D を含む開集合とし，$X=(f,g,h)$ を U 上で定義された C^1 級のベクトル場とする. このとき，次の等式

$$\int_D \operatorname{div} X\, dv = \int_S X\cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

が成立する. これを成分で書けば

$$\iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_S f dydz + g dzdx + h dxdy$$



S_2 : S_1 が囲む区域の内部に埋め込まれた閉曲面で，
各法線ベクトルは S_2 の内側に向かって出ている.

図 11.1 有限個の閉曲面で囲まれたコンパクトな区域.

となる．ただし $S=\bigcup_i S_i$ とする．

一般に，向き付けられた閉曲面 S 上のベクトル値関数 $\boldsymbol{f}: S \to \mathbb{R}^n$ の面積分 $\int_S \boldsymbol{f}\,d\sigma$ を次のように定義する．すなわち $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_n)$（$f_i$ は $\boldsymbol{f}$ の第 i 成分）とするとき

$$\int_S \boldsymbol{f}\,d\sigma = \left(\int_S f_1\,d\sigma,\cdots,\int_S f_n\,d\sigma\right).$$

例題 11.1　定理 11.1 の設定において，等式

$$\int_D \mathrm{grad}\, f\,dv = \int_S f\boldsymbol{n}\,d\sigma$$

が成立することを証明せよ．

解答　定義から $\mathrm{grad}\, f=(f_x,f_y,f_z)$ である．ガウスの定理 11.1 により

$$\int_D f_x dv = \int_S f dydz$$

であるが，一方

$$\int_S f dydz = \int_S f\cos\alpha\,d\sigma = \int_S (f\boldsymbol{n})_1 d\sigma$$

である．ここで $(f\boldsymbol{n})_1$ は 3 次元ベクトル値関数 $f\boldsymbol{n}$ の第 1 成分を表す．したがって，等式

$$\int_D f_x dv = \int_S (f\boldsymbol{n})_1 d\sigma$$

が得られる．f_y および f_z の積分についても同様な等式が成立する．これら 3 つの等式を合わせれば求める式が得られる．

例題 11.2　定理 11.1 の設定において，等式

$$\int_D \mathrm{rot}\, X\,dv = \int_S \boldsymbol{n}\times X\,d\sigma$$

が成立することを証明せよ

解答　$X=(f,g,h)$ と成分で表示すれば，rot の定義により

$$\mathrm{rot}\, X = (h_y-g_z, f_z-h_x, g_x-f_y)$$

である．この第 1 成分の D 上の積分をガウスの定理 11.1 を適用して計算すると

$$\begin{aligned}\int_D (h_y-g_z)dv &= \int_D h_y dv - \int_D g_z dv\\ &= \int_S hdzdx - \int_S gdxdy\\ &= \int_S (h\cos\beta - y\cos\gamma)\,d\sigma\end{aligned}$$

$$= \int_S (hn_y - yn_z)\, d\sigma$$
$$= \int_S (\boldsymbol{n} \times X)_1\, d\sigma$$

となる．ただし，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の各成分を $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ と表し（実際には $n_x = \cos\alpha, n_y = \cos\beta, n_z = \cos\gamma$ である），$(\boldsymbol{n} \times X)_1$ は $\boldsymbol{n} \times X$ の第 1 成分を表すものとする．第 2 成分，第 3 成分についても同様の計算をし，合わせれば求める等式が得られる．

11.2 ストークスの定理

次に第 5 回でも述べたグリーンの定理を思い出そう．

定理 11.2（グリーンの定理） C を平面 $\mathbb{R}^2$ 上の区分的に C^1 級の単純閉曲線で，時計と反対回りに向き付けられているものとし，C が囲む区域を D とする．また，f, g を D を含む開集合 U 上で定義された C^1 級の関数とする．このとき，次の等式

$$\int_C f dx + g dy = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdy$$

が成立する．

前回ガウスの定理を扱った際に，上記のグリーンの定理は 2 つの方向に一般化することができると述べた．一つは

$$\begin{aligned} \text{平面} &\Rightarrow \text{空間}, \\ \text{単純閉曲線} &\Rightarrow \text{閉曲面}, \\ 1\,\text{次の微分式} &\Rightarrow 2\,\text{次の微分式}, \\ \text{線積分} &\Rightarrow \text{面積分} \end{aligned}$$

のように，次元をそれぞれ一つ上げて得られる一般化で（図 11.2 (a) 参照），こ

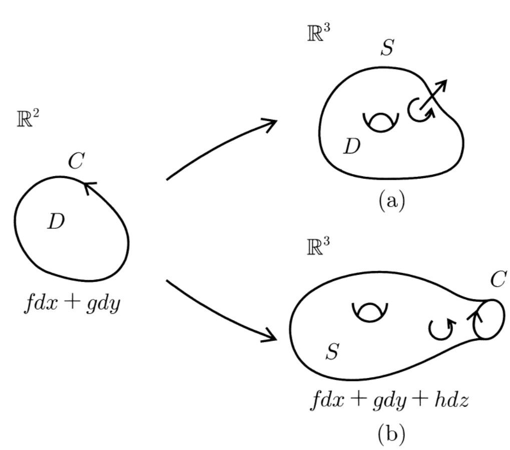


図 11.2　グリーンの定理の 2 つの一般化：(a) ガウスの定理と (b) ストークスの定理．

れがガウスの定理である．今回扱うストークスの定理は，上記で第一の部分

平面 $\Rightarrow$ 空間

だけを考慮した一般化で得られるものである．すなわち，平面とその中の単純閉曲線の替わりに空間の中の単純閉曲線を考え，そこでの1次の微分式の線積分に関する定理である（図 11.2 (b) 参照）．グリーンの定理の右辺を

$$\iint_D (g_x - f_y)\,dxdy$$

と書き換えた上で，変数を x, y から x, y, z に増やした場合にどのような等式の成立が期待できるか考えてみれば，次のストークスの定理が自然と浮かんでくるだろう．

定理 11.3（ストークスの定理） S を空間 $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられたコンパクトな曲面とし，$C = \partial S$ を S の境界で S の向きから誘導される向きをもつものとする．U を S を含む開集合とし，f, g, h を U 上で定義された C^1 級の関数とする（図 11.2 (b) 参照）．このとき，次の等式

$$\int_C f dx + g dy + h dz = \iint_S (h_y - g_z)\,dydz + (f_z - h_x)\,dzdx + (g_x - f_y)\,dxdy$$

が成立する．

ストークスの定理は等式の両辺とも3つの項を持っているが，実は対応する項がそれぞれ等しいのである．このことは，例えば $g = h = 0$ とすれば

$$\int_C f dx = \iint_S f_z dzdx - f_y dxdy \qquad (11.1)$$

が成立することから容易に分かる．

例題 11.3 上記で S が図 11.3 に示すような形をしている場合に，等式 (11.1) を証明せよ．

解答 図 11.3 に示すように，S 上の各点において与えられた向きから右ねじの方向に出した法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．このとき $\boldsymbol{n}$ は，各座標軸とのなす角度の余弦を使って

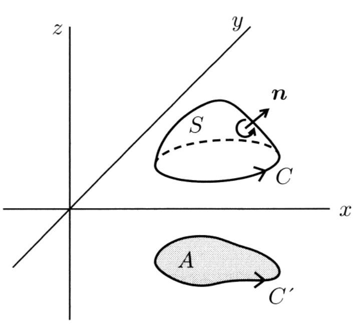


図 11.3 単純な曲面．

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

と表示できる．また S の xy 平面への正射影を A とすれば，その境界 C' は図のように向き付けられた単純閉曲線となる．さらに，曲面 S は A を含む xy 平面のある開集合 U 上で定義された C^1 級関数 $F : U \to \mathbb{R}$ のグラフの形

$$S = \{(x, y, z); z = F(x, y), (x, y) \in A\}$$

をしているとしてよい．そこで，A 上の実数値関数

$$f_1 : A \to \mathbb{R}$$

を

$$f_1(x, y) = F(x, y, F(x, y)) \quad ((x, y) \in A)$$

とおくことにより定義する．ここでグリーンの定理を適用すれば

$$\int_{C'} f_1 dx = -\iint_A \frac{\partial f_1}{\partial y} dxdy$$

が得られる．さらに

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, F(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, F(x, y))\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$$

であることを使えば

$$\int_C f dx = -\iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y}\right) dxdy \tag{11.2}$$

が得られる．さて，S 上では

$$dxdy = \cos\gamma\, d\sigma, \quad dzdx = \cos\beta\, d\sigma$$

であるが，一方 S の定義式は $z - F(x, y) = 0$ であるから

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, 1\right) \text{ の実数倍}$$

となる．これから

$$\frac{\partial F}{\partial y}\cos\gamma = -\cos\beta$$

が得られ，したがって S 上で

$$\frac{\partial F}{\partial y} dxdy = \frac{\partial F}{\partial y}\cos\gamma\, d\sigma = -\cos\beta\, d\sigma = -dzdx$$

となる．これを式 (11.2) に代入すれば

$$\int_C f dx = \iint_S f_z dzdx - f_y dxdy$$

となり証明が終わる．

ストークスの定理の別の表現法を考えよう．ストークスの定理 11.3 において

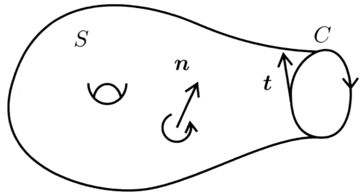


図 11.4　曲面とその境界.

$$Y = (f, g, h)$$

とおけば，これは U 上のベクトル場と思うことができる．そして，その回転ベクトル場を X とすれば

$$X = \mathrm{rot}\, Y = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y)$$

となる．また，上記の例題 11.3 の場合と同様に，各点 $\mathrm{P} \in S$ における外向きの長さ 1 の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，その各座標軸の正の方向とのなす角度をそれぞれ α, β, γ とすれば

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

となる（図 11.4 参照）．したがって

$$\begin{aligned}\iint_S X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma &= \iint_S \{(h_y - g_z)\cos\alpha + (f_z - h_x)\cos\beta + (g_x - f_y)\cos\gamma\} d\sigma \\ &= \iint_S (h_y - g_z)\, dydz + (f_z - h_x)\, dzdx + (g_x - f_y)\, dxdy\end{aligned}$$

となり，定理 11.3 の右辺の式となる．

次に左辺の式のベクトルによる記法を考えよう．S の境界 C は空間の中の単純閉曲線であるが，それには図 11.4 に示すような S の向きと同調する向きを入れる．そして C 上の各点において与えられた向きの方向の長さ 1 の接ベクトルを $\boldsymbol{t}$ とする．このベクトルと各座標軸の正の方向とのなす角度をそれぞれ α', β', γ' とすれば

$$\boldsymbol{t} = (\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$$

となる．このとき

$$\begin{aligned}\int_C f dx &= \int_C f \cos\alpha' ds, \\ \int_C g dy &= \int_C g \cos\beta' ds, \\ \int_C h dz &= \int_C h \cos\gamma' ds\end{aligned}$$

であるから

$$\int_C f dx + g dy + h dz = \int_C (f\cos\alpha' + g\cos\beta' + h\cos\gamma')\, ds$$

$$= \int_C Y \cdot \boldsymbol{t}\, ds$$

となる．ただし，$Y \cdot \boldsymbol{t}$ は Y と $\boldsymbol{t}$ との内積を表す．こうして次のようなベクトル記法によるストークスの定理が得られる．

定理 11.4（**ストークスの定理（ベクトル記法）**） S を空間 $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられたコンパクトな曲面とし，$C = \partial S$ を S の境界で S の向きから誘導される向きをもつものとする．U を S を含む開集合とし，Y を U 上で定義された C^1 級のベクトル場とする（図 11.4 参照）．このとき，次の等式

$$\int_S \operatorname{rot} Y \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_C Y \cdot \boldsymbol{t}\, ds$$

が成立する．

上記において，ベクトル場 Y が均質な液体の流れを表しているものとすれば，左辺は S 上の各点においてその真上から流れを見たときに，接平面にたてた垂線の回りを巡る単位時間当たりの循環の量を面積分した値である．一方右辺は，S の境界である曲線 C に沿って流れが循環する総量である．ここで，近くにある 2 点の回りの循環が互いに "打ち消し合う" 性質をもつことに注意すれば，上記の 2 つの積分の値が一致するのは当然といえるだろう．

例題 11.4 定理 11.4 の設定に加えて，$f : U \to \mathbb{R}$ を C^1 級の関数とする．このとき，等式

$$\int_C (fY) \cdot \boldsymbol{t}\, ds = \int_S (f \operatorname{rot} Y) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma - \int_S (Y \times \operatorname{grad} f) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

が成立することを証明せよ．

解答 ストークスの定理において Y のところに fY を代入すれば，等式

$$\int_S \operatorname{rot}(fY) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_C (fY) \cdot \boldsymbol{t}\, ds \tag{11.3}$$

が成立することが分かる．一方，第 4 回の例題 4.4 (iii) ですでに確かめた通り，等式

$$\operatorname{rot}(fY) = f \operatorname{rot} Y - Y \times \operatorname{grad} f$$

が成立する．これを式 (11.3) に代入すれば，証明すべき式となる．

例題 11.5 $X = (f, g, h)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の C^1 級のベクトル場とする．もし $\operatorname{div} X = 0$ ならば，$\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられたコンパクトな曲面 S に対し，面積分

$$\int_S X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

の値は，S の境界の曲線 C のみに依存して定まることを示せ．逆に，上記積分の値が境界 C のみに依存して定まるならば，$\operatorname{div} X = 0$ であることを証明せよ．

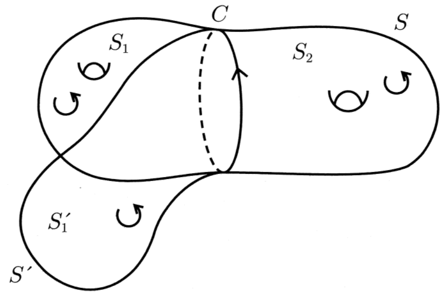


図 11.5 2 つの曲面の共通の境界.

解答 図 11.5 のように向き付けられた曲線 C が，コンパクトな向き付けられた閉曲面 S の上にあり，2 つの部分 S_1, S_2 に分けている場合を想定しよう．さらに C は向き付けられたコンパクトな曲面 S'_1 の境界にもなっているものとする．このとき，C は S_1 と S'_1 の双方の共通の境界となる．さて，$S = S_1 \cup S_2$ が囲む区域を D，$S' = S'_1 \cup S_2$ が囲む区域を D' とすれば，ガウスの定理により

$$\int_S X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{S_1} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_{S_2} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_D \operatorname{div} X dv = 0,$$
$$\int_{S'} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{S'_1} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \int_{S_2} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{D'} \operatorname{div} X dv = 0$$

となる．これから等式

$$\int_{S_1} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{S'_1} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

が得られる．S'_1 の取り方は任意であるから，前半が証明された．次に後半を示そう．もし $\operatorname{div} X \neq 0$ であれば，ある点の近くで $\operatorname{div} X$ の値は正あるいは負の一定の符号を取ることになる．このとき，この点の近くにおいて図 11.5 のような曲面を十分小さく取れば

$$\int_{S_1} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \neq \int_{S'_1} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

となることが上記の議論から分かる．その対偶を取れば逆が成り立つことになり証明が終わる．

上記において，もし $X = \operatorname{rot} Y$ と書くことができれば，以前（第 4 回の例題 4.2）述べたように $\operatorname{div} X = 0$ となる（回転はわきだしなし）．このときは，ストークスの定理により

$$\int_{S_1} X \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{S_1} \operatorname{rot} Y \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_C Y \cdot \boldsymbol{t}\, ds$$

となるから，確かにこの面積分が境界の曲線 C のみに依存することが明示的に示される．実は，$\mathbb{R}^3$ においては $\operatorname{div} X = 0$ ならばいつでも $X = \operatorname{rot} Y$ と書けることが知られている．

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

第16回

微分方程式 1

常微分方程式

海老原 円・太田 雅人

16.1 求積法

今回は常微分方程式に関する問題を取り上げる．最も簡単な微分方程式は $\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ であり，これは与えられた関数 $f(x)$ の原始関数を求める問題に他ならない．ここで考える**求積法**とは，適当な式変形により，この最も簡単な微分方程式に帰着させる方法である．まず，**1 階線形方程式**とそれに関連する問題から始めよう．なお，以下本稿では，C, C_1, C_2 などは任意定数を表すものとする．また，$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を y', y'' とも表す．

問題 16.1 （東北大学大学院工学研究科機械系 4 専攻，平成 25 年度） 以下の常微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=\sin x\cos x.$

(2) $\dfrac{dy}{dx}+y=3e^xy^3.$

(3) $(1+x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0.$

解答例 (1) これは **1 階線形方程式**である．

$$\frac{d}{dx}\{e^{\sin x}y(x)\}=e^{\sin x}\{y'(x)+y(x)\cos x\}=e^{\sin x}\sin x\cos x$$

だから，右辺の不定積分を計算すればよい．$t=\sin x$ と置換すると

$$\begin{aligned}e^{\sin x}y(x)&=\int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx=\int e^t t\,dt\\&=e^t(t-1)+C=e^{\sin x}(\sin x-1)+C\end{aligned}$$

となる．よって，求める一般解は $y(x) = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$ である．

(2)　これは**ベルヌーイの方程式**である．$w(x) = y(x)^{-2}$ とおくことにより，

$$\begin{aligned} w'(x) &= -2y(x)^{-3}y'(x) = -2y(x)^{-3}\{-y(x) + 3e^x y(x)^3\} \\ &= 2w(x) - 6e^x \end{aligned}$$

と 1 階線形方程式に変形できる．

$$\frac{d}{dx}\{e^{-2x}w(x)\} = e^{-2x}\{w'(x) - 2w(x)\} = -6e^{-x}$$

を積分すると，$e^{-2x}w(x) = 6e^{-x} + C$ だから，$w(x) = 6e^x + Ce^{2x}$ となる．

よって，求める一般解は

$$y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{6e^x + Ce^{2x}}}.$$

(3)　$w(x) = y'(x) + y(x)$ とおくと，与えられた **2 階線形方程式**は 1 階線形方程式

$$(1 + x)w'(x) = w(x)$$

に変形できる．この一般解は $w(x) = C_1(1 + x)$ だから，y に関する 1 階線形方程式

$$y'(x) + y(x) = C_1(1 + x)$$

を解けばよい．$\dfrac{d}{dx}\{e^x y(x)\} = e^x\{y'(x) + y(x)\} = C_1 e^x(1 + x)$ を積分すると

$$e^x y(x) = C_1 \int e^x(1 + x)\,dx = C_1(xe^x + C)$$

だから，求める一般解は $y(x) = C_1 x + C_2 e^{-x}$ である．　　　　**解答終わり**

1 階線形方程式 $y' + p(x)y = q(x)$ は，$P(x)$ を $p(x)$ の原始関数とすると

$$\frac{d}{dx}\{e^{P(x)}y(x)\} = e^{P(x)}\{y'(x) + p(x)y(x)\} = e^{P(x)}q(x)$$

となり，右辺の関数 $e^{P(x)}q(x)$ の不定積分を求める問題に帰着される．

また，**ベルヌーイの方程式** $y' + p(x)y = q(x)y^n$ $(n \neq 1)$ は，$w(x) = y(x)^{1-n}$ とおくことにより，1 階線形方程式 $w' + (1 - n)p(x)w = (1 - n)q(x)$ に帰着される．

一方，**2 階線形方程式** $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ には一般的な解の公式はないため，問題に応じた工夫が必要となる．

次に，**リッカチの方程式** $y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$ に関する問題を取り上げる．リッカチの方程式も一般的な解法はないが，特解が一つ見つかれば，ベルヌーイの方程式に変形でき，一般解が求まる．

問題 16.2　(東京大学大学院工学系研究科，平成 24 年度)　微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + (2x^2 + 1)y + y^2 + (x^4 + x^2 + 2x) = 0$$

の一般解を求めよ．ただし，$y = -x^2$ が特解であることを用いてよい．

解答例　$w(x)=y(x)+x^2$ とおくと，w はベルヌーイの方程式 $w'+w+w^2=0$ を満たす．さらに，$u(x)=w(x)^{-1}$ とおくと，u は 1 階線形方程式 $u'=u+1$ を満たす．この一般解は $u(x)=Ce^x-1$ だから，求める一般解は

$$y(x)=w(x)-x^2=\frac{1}{Ce^x-1}-x^2$$

である．　**解答終わり**

16.2 2 階線形方程式

この節では，2 階線形方程式に関する問題を取り上げる．前節でも述べたが，2 階線形方程式には一般的な解法はないため，問題に応じた工夫が必要となる．

問題 16.3　(東京大学大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻，平成 21 年度)
次の微分方程式

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \tag{1}$$

において，独立変数 x を t の関数 $x(t)$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，x, y および t は実数である．

(問 1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ と $\dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ $\dfrac{d^2t}{dx^2}, \dfrac{dt}{dx}, \dfrac{d^2y}{dt^2}, \dfrac{dy}{dt}$ を用いて表せ．

(問 2)　(問 1) の結果を用いて，式 (1) が式 (2) に変換されることを示せ．

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left\{\left(\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{Q(x)}{P(x)}\frac{dt}{dx}\right)\frac{1}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}\right\}\frac{dy}{dt}+\frac{R(x)}{P(x)}\frac{1}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}y=0. \tag{2}$$

ただし，$P(x)\neq 0, \dfrac{dt}{dx}\neq 0$ とする．

(問 3)　$x(t)$ が以下の式を満足するとき，微分方程式 (2) の一般解を求め，y を t の関数として表せ．

$$\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{Q(x)}{P(x)}\frac{dt}{dx}=0, \tag{3}$$

$$\frac{R(x)}{P(x)}\frac{1}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2}=k \quad (k\text{ は実定数}, k\neq 0). \tag{4}$$

次に，式 (1) において，$P(x)=1-x^2, Q(x)=-x, R(x)=9$ とした微分方程式 (5) を以下の手順で解くことを考える．以下の問いに答えよ．

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+9y=0. \tag{5}$$

ただし，$-1<x<1$ とする．

(問 4)　式 (3) を満たす解 $x(t)$ を一つ求めよ．また，その解が式 (4) を満足することを示せ．

(問 5)　(問 4) で得られた $x(t)$ を用いて，独立変数 x を t に変換した微分方程式 (2) の一般解を求め，y を t の関数として表せ．

(問 6)（問 4）と（問 5）の結果を用いて，式 (5) の一般解を x の関数として求めよ．

解答例　(問 1)　合成関数の微分の公式より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}.$$

(問 2)　（問 1）の結果を式 (1) に代入すると

$$P(x)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2}+\left\{P(x)\frac{d^2t}{dx^2}+Q(x)\frac{dt}{dx}\right\}\frac{dy}{dt}+R(x)y=0$$

となる．この両辺を $P(x)\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2$ で割れば，式 (2) を得る．

(問 3)　$x(t)$ が式 (3), (4) を満たすとき，微分方程式 (2) は $\dfrac{d^2y}{dt^2}+ky=0$ となる．この方程式の一般解は，$k>0$ のとき，$y(t)=C_1\cos\sqrt{k}\,t+C_2\sin\sqrt{k}\,t$ であり，$k<0$ のとき，$y(t)=C_1e^{\sqrt{-k}\,t}+C_2e^{-\sqrt{-k}\,t}$ である．

(問 4)　$P(x)=1-x^2$, $Q(x)=-x$ のとき，$w=\dfrac{dt}{dx}$ とおくと，式 (3) より，w は 1 階線形方程式 $\dfrac{dw}{dx}-\dfrac{x}{1-x^2}w=0$ を満たす．

この一般解は $w(x)=C_1(1-x^2)^{-1/2}$ だから，$\dfrac{dt}{dx}=w(x)=\dfrac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}$ より，$t=C_1\sin^{-1}x+C_2$ となる．ここで，特に，$C_1=1$, $C_2=0$ ととれば，式 (3) の解の一つとして，$x(t)=\sin t$ を得る．

また，この解は $k=9$ として，式 (4) を満たす．

(問 5)（問 3）と（問 4）より，微分方程式 (2) は $\dfrac{d^2y}{dt^2}+9y=0$ となり，この一般解は $y(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t$ である．

(問 6)　3 倍角の公式より

$$\cos 3t=\cos^3t-3\cos t\sin^2t=\cos t(1-4\sin^2t),$$
$$\sin 3t=3\cos^2t\sin t-\sin^3t=3\sin t-4\sin^3t$$

だから，（問 4）と（問 5）の結果より，方程式 (5) の一般解

$$y(x)=C_1(1-4x^2)\sqrt{1-x^2}+C_2(3x-4x^3)$$

を得る．　　　　**解答終わり**

次に，ベキ級数による解法の例として，**ルジャンドルの微分方程式**に関する問題を取り上げる．

問題 16.4（大阪大学大学院工学研究科電気電子情報工学専攻，平成 26 年度）次の 2 階微分方程式

$$(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}y(x)+2x\frac{d}{dx}y(x)-\nu(\nu+1)y(x)=0$$

の解を求める．ただし，ν は非負の整数である．この微分方程式の一般解は，

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

の級数の形で与えられる．ここで，c_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ は定数である．

以下の (a)〜(e) の設問に答えよ．

(a) $\dfrac{d}{dx}y(x)$ ならびに $\dfrac{d^2}{dx^2}y(x)$ を c_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を用いて，級数の形で示せ．

(b) (a) の結果を利用して，c_{k+2} と c_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ の関係を示せ．

(c) $c_0 = 1,\ c_1 = 0$ のときの解を，級数の形で示せ．

(d) $c_0 = 0,\ c_1 = 1$ のときの解を，級数の形で示せ．

(e) $x = 0$ における $y(x)$, $\dfrac{d}{dx}y(x)$ をそれぞれ $y(0) = a$, $\dfrac{d}{dx}y(0) = b$（a, b は実数）とする．このとき，$y(x)$ を (c) で求めた解 $y_1(x)$ と (d) で求めた解 $y_2(x)$ を用いて表わせ．

解答例　(a)　項別微分をすると

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

(b)　(a) より

$$xy'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k,$$

$$x^2 y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k x^k,$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) c_{k+2} x^k$$

だから，

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - x^2) y''(x) - 2xy'(x) + \nu(\nu+1) y(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)(k+2) c_{k+2} - \{k(k+1) - \nu(\nu+1)\} c_k\right] x^k \end{aligned}$$

となる．よって，c_{k+2} と c_k の関係式

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \nu(\nu+1)}{(k+1)(k+2)} c_k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

を得る．

(c)　(b) で求めた漸化式と $c_1 = 0$ より，$c_{2m-1} = 0$ $(m = 1, 2, \cdots)$ である．

また，$c_0 = 1$ から順に解いていくと

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{0 \cdot 1 - \nu(\nu+1)}{1 \cdot 2} c_0 = \frac{-\nu(\nu+1)}{2!}, \\ c_4 &= \frac{2 \cdot 3 - \nu(\nu+1)}{3 \cdot 4} c_2 = \frac{-\nu(\nu+1)\{2 \cdot 3 - \nu(\nu+1)\}}{4!}, \cdots \end{aligned}$$

となり，一般に，

$$c_{2m} = \frac{1}{(2m)!} \prod_{j=0}^{m-1} \{2j(2j+1) - \nu(\nu+1)\} \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

だから，求める解 $y_1(x)$ は

$$y_1(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} x^{2m} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \prod_{j=0}^{m-1} \{2j(2j+1) - \nu(\nu+1)\} \, x^{2m}$$

である．

(d)　前問 (c) と同様に計算すると，求める解 $y_2(x)$ は

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \prod_{j=0}^{m-1} \{(2j+1)(2j+2) - \nu(\nu+1)\} \, x^{2m+1}$$

となる．

(e)　(c) で求めた解 $y_1(x)$ は $x = 0$ における初期条件 $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ を満たす．また，(d) で求めた解 $y_2(x)$ は初期条件 $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ を満たす．

ここで，$y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$ とおくと，方程式の線形性より，$y(x)$ は与えられた微分方程式を満たす．また，$y(0) = ay_1(0) + by_2(0) = a$, $y'(0) = ay_1'(0) + by_2'(0) = b$ となるから，設問に対する答えは $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$ である．　**解答終わり**

ν が偶数のとき，$y_1(x)$ は ν 次多項式である．また，ν が奇数のとき，$y_2(x)$ は ν 次多項式である．これらは**ルジャンドル多項式**の定数倍である．

一方，ν が奇数のとき，$y_1(x)$ は多項式ではなく，無限級数となる．このとき，

$$\frac{|c_{2m+2}|}{|c_{2m}|} = \frac{|2m(2m+1) - \nu(\nu+1)|}{(2m+1)(2m+2)} \to 1 \quad (m \to \infty)$$

だから，ダランベールの判定法より，$y_1(x)$ の収束半径は 1 であり，$-1 < x < 1$ において，与えられた微分方程式を満たす．同様に，ν が偶数のとき，$y_2(x)$ は収束半径 1 のベキ級数であり，$-1 < x < 1$ において，与えられた微分方程式を満たす．

16.3 解の定性的性質

前節までは，常微分方程式の解の具体形を求める問題を考えてきたが，すべての常微分方程式が具体的に解けるわけではない．解の具体形が分からなくても，多くの場合，初期値問題の**解の存在と一意性**は保証される．このとき，解の定性的な性質を調べることが重要となる．この節では，そのような問題を取り上げる．

問題 16.5　(東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻，平成 23 年度)　$f(u)$ は $\mathbb{R}$ 上のリプシッツ連続な関数で，$f(0) = 0$ および，$u > 0$ に対して $f(u) < 0$ を満たすとする．微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt} u(t) = f(u(t)), \quad u(0) = 1$$

の解 $u(t)$ $(t \geq 0)$ に対して，以下の問に答えよ．

(i) 解 $u(t)$ はすべての $t > 0$ について正の値をとり，$t \to \infty$ のとき $u(t) \to 0$ となることを示せ．

(ii) $\lim_{u \to +0} f(u)/u$ が存在して負の値をとるとき，ある正定数 a, b に対して，

$$e^{-at} < u(t) < e^{-bt}, \quad t \in (0, \infty)$$

が成り立つことを示せ．

解答例 (i) まず，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $u(t) \neq 0$ であることを背理法で示す．$u(t_1) = 0$ となる $t_1 \in \mathbb{R}$ が存在したと仮定する．$f(0) = 0$ だから，定数関数 $z(t) \equiv 0$ は微分方程式 $v'(t) = f(v(t))$ の解である．また，$f(u)$ は $\mathbb{R}$ 上でリプシッツ連続[*1]だから，初期値問題

$$v'(t) = f(v(t)), \quad v(t_1) = 0$$

の解の一意性により，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $u(t) = z(t) = 0$ となるが，これは $u(0) = 1$ と矛盾する．ゆえに，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $u(t) \neq 0$ である．

さらに，$u(0) = 1$ かつ $u(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続だから，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $u(t) > 0$ である．これから，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，$u'(t) = f(u(t)) < 0$ となり，$u(t)$ は減少関数である．よって，極限 $l := \lim_{t \to \infty} u(t)$ が存在し，$l \geq 0$ である．

ここで，$l > 0$ と仮定し，$m := \max\{f(u) : l \leq u \leq 1\}$ とおくと，$m < 0$ である．また，すべての $t \geq 0$ に対して，$l \leq u(t) \leq 1$ だから，$u'(t) = f(u(t)) \leq m$ である．よって，$t \to \infty$ のとき，$u(t) \leq u(0) + mt \to -\infty$ となるが，これは矛盾である．

ゆえに，$l = 0$ であり，$t \to \infty$ のとき $u(t) \to 0$ となる．

(ii) 仮定より，関数 $u \mapsto f(u)/u$ は有界閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数に延長でき，区間 $[0, 1]$ 上で負の値をとる．よって

$$\alpha := -\min\left\{\frac{f(u)}{u} : 0 \leq u \leq 1\right\}, \quad \beta := -\max\left\{\frac{f(u)}{u} : 0 \leq u \leq 1\right\}$$

とおくと，$\alpha \geq \beta > 0$ である．また，(i) より，$u(t)$ は減少関数であり，$t \geq 0$ に対して，$0 < u(t) \leq 1$ である．よって，すべての $t \geq 0$ に対して，

$$-\alpha u(t) \leq u'(t) = f(u(t)) \leq -\beta u(t) \tag{16.1}$$

が成り立つ．これから，すべての $t \geq 0$ に対して，

$$\{e^{\alpha t} u(t)\}' = e^{\alpha t}\{u'(t) + \alpha u(t)\} \geq 0$$

だから，$e^{\alpha t} u(t) \geq u(0) = 1$ となり，$u(t) \geq e^{-\alpha t}$ が成り立つ．同様にして，すべての $t \geq 0$ に対して $u(t) \leq e^{-\beta t}$ が成り立つことが分かる．

よって，$0 < a < \alpha \leq \beta < b$ なる定数 a, b をとれば，すべての $t \in (0, \infty)$ に対して $e^{-at} < u(t) < e^{-bt}$ が成り立つ． **解答終わり**

*1) $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ を満たす定数 L が存在するとき，f は $\mathbb{R}$ 上でリプシッツ連続であるという．

上の解答例のように，解の定性的性質を調べる問題は，しばしば，(16.1) のような**常微分不等式**に帰着される．それを解くためにも求積法は重要である．

問題 16.6　（京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻，平成 23 年度）　$f(x,y)$, $g(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ で定義された C^1 級函数で

$$xf(x,y)+yg(x,y)\le(1+x^2+y^2)\sqrt{\log(1+x^2+y^2)}$$

を満たすものとする．このとき常微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=g(x,y)$$

は，任意の $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ に対して，$t\in[0,\infty)$ で定義され，$x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$ をみたす解 $(x(t),y(t))$ を持つことを示せ．

解答例　$\boldsymbol{u}=(x,y)$, $\boldsymbol{F}=(f,g)$ とおく．f, g は $\mathbb{R}^2$ で C^1 級だから，局所リプシッツ連続である．よって，初期値問題に対する**局所解の一意存在定理**より，任意の $\boldsymbol{u}_0:=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}),\quad \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0$$

の局所解 $\boldsymbol{u}(t)$ が一意的に存在する．また，$\boldsymbol{u}(t)$ の最大存在時間を $T^*=T^*(\boldsymbol{u}_0)$ とすると，$\boldsymbol{u}(t)$ は区間 $[0,T^*)$ で C^1 級であり，$T^*<\infty$ ならば $\lim_{t\to T^*}|\boldsymbol{u}(t)|=\infty$ となる．ここで，$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{x^2+y^2}$ である．

示すべきことは，任意の $\boldsymbol{u}_0\in\mathbb{R}^2$ に対して，$T^*(\boldsymbol{u}_0)=\infty$ となることである．これを背理法で示そう．ある $\boldsymbol{u}_0\in\mathbb{R}^2$ に対して，$T^*=T^*(\boldsymbol{u}_0)<\infty$ であると仮定する．このとき，$w(t):=|\boldsymbol{u}(t)|^2$ とおくと，$\boldsymbol{F}=(f,g)$ に対する仮定より，$t\in[0,T^*)$ に対して，

$$\frac{1}{2}w'(t)=\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{u}'(t)=\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}(t))\le(1+w(t))\sqrt{\log(1+w(t))}$$

が成り立つ．これは**変数分離型**の常微分不等式である．$t\in[0,T^*)$ に対して

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\log(1+w(t))}=\frac{w'(t)}{2(1+w(t))\sqrt{\log(1+w(t))}}\le 1$$

だから，$c_0:=\sqrt{\log(1+w(0))}$ とおくと，$\sqrt{\log(1+w(t))}\le t+c_0$ となる．これから，すべての $t\in[0,T^*)$ に対して，

$$|\boldsymbol{u}(t)|^2=w(t)\le e^{(t+c_0)^2}-1$$

となるが，これは $\lim_{t\to T^*}|\boldsymbol{u}(t)|=\infty$ と矛盾する．

ゆえに，任意の $\boldsymbol{u}_0\in\mathbb{R}^2$ に対して，$T^*(\boldsymbol{u}_0)=\infty$ である．　**解答終わり**

今回はここまでにしよう．次回は，偏微分方程式に関する問題を取り上げる．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

経路積分と量子解析

第3回

いかにして量子現象を数理的に扱うか

古典力学から量子力学へ(2)

散逸系の変分原理と経路積分量子化

鈴木 増雄

3.1 はじめに

経路積分量子化の根底には変分原理がある．そこで，前回は，自由粒子と調和振動子についての経路積分表示を述べた後に，変分原理を与えるラグランジアンの物理的意義・役割を具体例を用いて丁寧に説明した[1)]．

今回は，一般の力学系に対する経路積分表示とシュレーディンガー方程式との関係を説明する．その後で，唯一未解決のままであった，散逸ダイナミクスの変分原理と散逸ラグランジアンの理論[2)]を解説する．

3.2 一般的な力学系の経路積分表示とシュレーディンガー方程式との等価性

量子力学は本質的に確率的性格を持っており，粒子の振舞いは波動関数 $\psi(x,t)$ で記述され，その存在確率は $|\psi(x,t)|^2$ で与えられる．量子力学の基礎法則はこの波動関数の従うシュレーディンガー方程式で記述される．すなわち，量子力学的状態を表現するものが波動関数 $\psi(x,t)$ であり，これは古典力学のラグランジアン $\mathscr{L}(t)$ を用いて，次の経路積分（遷移振幅）と関係づけられる：

$$Z(x,t;x_0,t_0)=\int_{(x_0,t_0)}^{(x,t)}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathscr{L}(x(t),\dot{x}(t),t)\right]D[x(t)]. \tag{3.1}$$

ここで，ラグランジアン $\mathscr{L}(x(t),\dot{x}(t),t)$ は，系の運動エネルギー $T=\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2$ とポテンシャルエネルギー $V=V(x(t))$ とを用いて

$$\mathscr{L}(t)=T-V \tag{3.2}$$

と表される[1,3~7)]．また，$D[x(t)]$ はあらゆる経路 $x=x(t)$ $(t_0\le t)$ に関する経路積分を表す．系のハミルトニアン $\mathscr{H}$ は $\mathscr{H}=T+V$ と表されるが，ラグランジアンは式(3.2)のように運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V との差で表される．その物理的役割については前回[1)] 詳しく述べた通りである．

通常は，x_0 などの過去の詳細によらず，時刻 t と空間座標 x における量子状態を扱うので，この波動関数を $\psi(x,t)$ と書く．どの状態から移ってきたかを指定する波動関数は式 (3.1)，すなわち $Z(x,t;x_0,t_0)$ に比例する量 $K(x,t;x_0,t_0)$ で表される：

$$K(x,t;x_0,t_0) \propto Z(x,t;x_0,t_0). \tag{3.3}$$

この規格化された波動関数 $K(x,t;x_0,t_0)$ を用いると，上に定義した波動関数 $\psi(x,t)$ は明らかに

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t;x_0,t_0)\psi(x_0,t_0)dx_0 \tag{3.4}$$

の関係をみたす[5)]．

そこで，$K(x,t;x_0,t_0)$ が経路積分 (3.1) で表されるときには，$\psi(x,t)$ がシュレーディンガー方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x,t)}{dx^2} + V(x)\psi(x,t) \tag{3.5}$$

をみたすことを，数学的厳密さ[8)]にこだわらずに示すことにしよう．式 (3.4) のような大局的な積分形の定式化から，局所的な表現形式である微分方程式 (3.5) を導くには，t_0 を限りなく t に近づけてみればよい．そこで，$t_0 = t - \varepsilon$, $x_0 = x + \eta$ とおいて，式 (3.4) の右辺の ε のオーダーの項をテーラー展開により求め，零と置く．その際，式 (3.4) の $K(x,t;x_0,t_0)$ としては，

$$K(x,t;x+\eta,t-\varepsilon) = \frac{1}{A}\exp\left[\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}\mathscr{L}\left(x+\frac{\eta}{2},-\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\right] \tag{3.6}$$

とおくことができる．ただし，A は規格化定数である．ここで，$\mathscr{L}$ の中の $x(t)$ としては，中点 $\frac{1}{2}(x+x_0)$ を，$\dot{x}(t)$ としては，差分 $(x-x_0)$ と差分 $(t-t_0)$ の比を用いた．式 (3.4) の $\psi(x_0,t_0) = \psi(x+\eta,t-\varepsilon)$ も η と ε でテーラー展開する：

$$\psi(x_0,t_0) = \psi(x,t) - \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} + \eta\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \cdots. \tag{3.7}$$

ここで，すぐわかる通り，$dx_0 = d\eta$ を用いて η に関する積分を行うと，η の 1 次の寄与は零になるので，η の 2 次の項まで考慮する必要がある．実際，オーダーとしては，$\mathrm{O}(\eta^2) = \mathrm{O}(\varepsilon)$ の関係にある[5,9)]．また，遷移振幅 (3.6) の指数関数を η で展開すると

$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}\mathscr{L}\left(x+\frac{\eta}{2},-\frac{\eta}{\varepsilon}\right)\right] &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{m\eta^2}{2\varepsilon^2} - V(x) + \cdots\right)\right]\\ &= \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}V(x) + \cdots\right)\end{aligned} \tag{3.8}$$

となる．規格化定数 A は

$$1 = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar\varepsilon}\eta^2\right)d\eta = \frac{1}{A}\left(\frac{2\pi\mathrm{i}\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2} \tag{3.9}$$

の条件から定められる．すなわち，

$$A = \left(\frac{2\pi\mathrm{i}\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2} \tag{3.10}$$

である．さらに，公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta\exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar\varepsilon}\eta^2\right)d\eta = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar\varepsilon}\eta^2\right)d\eta = \frac{\mathrm{i}\hbar\varepsilon}{m} \tag{3.11}$$

を用いると，式 (3.4) の右辺の ε の 1 次の項の係数は零とおけるので，シュレーディンガー方程式 (3.5) が導かれる[5,9]．

こうして，経路積分による量子力学の定式化が示された．ポテンシャル $V(x)$ が与えられたとき，具体的に経路積分を求めるには，$x(t)$ のフーリエ級数表示

$$x(t) = \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right) \tag{3.12}$$

を用いると便利である[5,9]．ただし，τ は基本周期である．ポテンシャルが x の 2 次式 $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$（調和振動子）の場合には，遷移振幅 $K(x, t; x_0, t_0)$ を厳密に求めることができる[5,9]．しかし，一般の $V(x)$ に対しては，多数のモード間の結合の項が現れるので，非線形効果に関する摂動計算に頼らざるを得ない[5]．ここでは原理的な問題に限って議論することにしよう．

3.3 変分原理の研究で残された重要な問題——散逸ダイナミクスの取扱い

すでに説明した通り[3~9]，力学，電磁気学，相対性理論など，時間反転対称性を持つ自然法則の変分原理は確立されている．残された未解決の問題は，時間反転対称性を破る自然法則の変分原理を見出すことである．すでに過去何十年も多くの人々がこの問題に取り組んできたが，どの理論も問題だらけで，物理的に見て満足できるものではない[10~15]．

(i) 変分原理を与える数学的なラグランジアンと物理的なラグランジアン

一般に変関数 $x(t)$ およびその時間微分 $\dot{x}(t)$ に対する作用

$$S = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), \dot{x}(t), t)dt \tag{3.13}$$

を極小または停留値にするような関数 $f(x, \dot{x}, t)$ は次のオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}f_{\dot{x}} - f_x = \ddot{x}f_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{x}f_{\dot{x}x} + f_{\dot{x}t} - f_x = 0 \tag{3.14}$$

をみたす[9]．変分原理を見出す研究は，関数 f が与えられたときオイラー・ラグランジュ方程式の解 $x = x(t)$ を求めるのではなく，逆に，$x(t)$ を決める物理的法則がすでにわかっているときに，その方程式を与えるような関数 f を探すことである．これは，いわば変分原理の逆問題である．ここで大きな問題が生じる．式 (3.14) は 2 階の線形偏微分方程式であり，定数倍を除いても，この逆問題の解 $f = f(x, \dot{x}, t)$ は一意的には決まらない．数学的には，どれを用いても $x = x(t)$ を求める手段としては同じであるが，物理的には，自然法則を変分的に捉えて，その係わる現象をより深く統一的に理解できるような変分原理が望ましい．

その場合に，大変面白いことが起こり得る．単に数学的に求めた，ある 1 つのラグランジアン $\mathscr{L}^{(\mathrm{math})}(t)$ と物理的なラグランジアン $\mathscr{L}^{(\mathrm{phys})}(t)$ があって，すべての $x(t)$, $\dot{x}(t)$, t に対し，等式

$$\int_{t_0}^{t_1} f^{(\mathrm{math})}(x(t), \dot{x}(t), t; t_0, t_1)dt = \int_{t_0}^{t_1} f^{(\mathrm{phys})}(x(t), \dot{x}(t), t)dt \tag{3.15}$$

が成り立ち，なおかつ，2 つの被積分関数 $f^{(\mathrm{math})}$ と $f^{(\mathrm{phys})}$ とは一致しない

（全く異なる）ということがあり得る[2]．数学的な関数 $f^{(\mathrm{math})}$ は境界条件に依存する．これから紹介する散逸ダイナミクスの変分原理の理論[2]では，このような面白いことが起こる．そして，この場合には，いろいろ大変便利なことがある．一つは，数学的な関数 $f^{(\mathrm{math})}$ のほうが物理的な関数 $f^{(\mathrm{phys})}$ より簡単なことが多いので，実際の計算には前者を用い，物理的な議論には後者を用いるというような使い分けが可能となる．これは物理の理論としては大変新奇なことではないだろうか．物理的変分の式 $f^{(\mathrm{phys})}$ は，後で説明するように散逸ダイナミクスの場合には経路全体に依存する汎関数で表され，それをさらに時間で積分した作用の変分のとり方が一般に困難である．しかし，恒等式 (3.15) が存在する場合には，通常の被積分関数 $f^{(\mathrm{math})}$ に対する変分計算をすればよいことになり，大変都合がよい．

(ii) 粘性抵抗（摩擦力）のある系の変分原理に関する今までの研究とその難点[10~17]

もっとも典型的な散逸ダイナミクスを記述する方程式として，

$$m\ddot{x}(t)+\zeta\dot{x}(t)=F(x(t));\quad F(x)=-\frac{dV(x)}{dx} \tag{3.16}$$

を考えることにする．ここで，考えている粒子の質量を m，時刻 t における空間座標を $x(t)$，ζ は粘性係数，および $F(x(t))$ は粒子に働く外力とする．この外力 $F(x(t))$ は保存力とする．

この問題に対する変分原理として提案されているものは，筆者の視点に立てばすべて数学的なものである．典型的な例としては，

$$f(x(t),\dot{x}(t))=\mathrm{e}^{\zeta t/m}\left(T(\dot{x}(t))-V(x(t))\right) \tag{3.17}$$

が知られている[10,12~15]．この式は，散逸のない系のラグランジアン

$$\mathscr{L}_{\mathrm{dyn}}(t)\equiv T(\dot{x}(t))-V(x(t)) \tag{3.18}$$

に因子 $\exp\left(\frac{\zeta t}{m}\right)$ をかけただけの単純な式であり，これを極小にする，または停留値にすることの物理的意味は不明である．オイラー・ラグランジュ方程式 (3.14) の解として式 (3.16) が得られるということだけは明らかである．

3.4 散逸ダイナミクスの物理的な変分原理

(i) 直観的な理論（発見法的処方）

前節で扱った散逸ダイナミクスの式 (3.16) を例にして，ここでは熱エネルギーを含めたエネルギーバランス（エネルギー保存則）

$$T(\dot{x}(t))+V(x(t))+W_{\mathrm{heat}}(t)=\text{一定};\quad W_{\mathrm{heat}}(t)=\zeta\int_0^t \dot{x}(s)^2ds \tag{3.19}$$

に着目し，変分原理を模索してみる[18]．ここで，上式の第3項は，粘性抵抗による，時刻0から t までの熱の発生量全体を表す．明らかに，上の式を時間で微分すると，

$$\left(\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2+\zeta\dot{x}(t)-F(x(t))\right)\dot{x}(t)=0 \tag{3.20}$$

となり，運動方程式 (3.16) が得られる．したがって，式 (3.19) が変分原理から

得られるように，散逸ラグランジアン $\mathscr{L}_{\text{diss}}(t)$ を設定すればよいことになる．

これからの議論は試行錯誤を重ねて発見法的に進める．今までの長年の研究[10, 12~15]は，被積分関数 f を通常の関数空間（変関数 $x(t)$，その微分 $\dot{x}(t)$ および時間 t の顕わな関数）に限定して，2 階の偏微分方程式 (3.14) を解くものであった．このような正攻法では，以下の議論でわかるように，物理的な変分原理を構成する被積分関数としての散逸ラグランジアン $\mathscr{L}_{\text{diss}}(t)$ は見つからない．このために，散逸ダイナミクスの変分原理は物理的には長年の間未解決であったものと思われる[2]．

そこで，まずは近似的にでも，物理的な散逸ラグランジアンを探してみよう．そのヒントとして，前回のラグランジアンの物理的意味についての議論を再考する．通常の力学系のラグランジアンは，定数項を除いて，運動エネルギー T と外力のなす仕事量

$$W_{\text{dyn}}(t) = \int_{x(0)}^{x(t)} F(x)dx = V(x(0)) - V(x(t)) \tag{3.21}$$

との和として構成される．ここで，$t_0 = 0$ とした．熱の発生 $W_{\text{heat}}(t)$ があると，それだけ外力による仕事の粒子に与える効果が減ると考えられる．したがって，運動エネルギー $T(\dot{x}(t))$ と $(W_{\text{dyn}}(t) - W_{\text{heat}}(t))$ とがバランスするとみなし，直観的な散逸ラグランジアン $\mathscr{L}_{\text{diss}}^{(\text{直観})}$ は，定数項を除いて，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{diss}}^{(\text{直観})}(t) &= T(\dot{x}(t)) + W_{\text{dyn}}(t) - W_{\text{heat}}(t) \\ &= T(\dot{x}(t)) + V(x(t)) - W_{\text{heat}}(t) + (\text{定数})\end{aligned} \tag{3.22}$$

で与えられるとしてよいであろう．よって，直観的な散逸ラグランジアンに対する作用は

$$S_{\text{diss}}^{(\text{直観})} = \int_0^{t_1} \left(T(\dot{x}(t)) + W_{\text{dyn}}(t) - W_{\text{heat}}(t)\right) dt \tag{3.23}$$

で与えられることになる．次の問題は，この作用の変分をどう実行するかということである．なぜならば，散逸ラグランジアン (3.22) は，今までのような通常の関数ではなく，経路に依存する汎関数 $W_{\text{diss}}^{(\text{直観})}(t)$，すなわち，式 (3.19) を用いて表されているからである．関数 $\dot{x}(t)^2$ の 2 重積分の変分は

$$\begin{aligned}\delta\left(\zeta \int_0^{t_1} dt \int_0^t \dot{x}^2(s)ds\right) &= 2\zeta \int_0^{t_1} dt \int_0^t \dot{x}(s)\delta\dot{x}(s)ds \\ = 2\zeta \left(\int_0^{t_1} \dot{x}(t)\delta x(t)dt - \int_0^{t_1} dt \int_0^t \ddot{x}(s)\delta x(s)ds\right)\end{aligned} \tag{3.24}$$

の形にまでは，部分積分によって変形できるが，依然として第 2 項の 2 重積分の処理という（今までの変分計算には現れてこなかった）新しい困難に遭遇する．上の変形式 (3.24) の第 1 項（の半分）のみを利用すると，正しい運動方程式 (3.16) が得られる．

この議論から，熱の発生の効果を表す表式 (3.19) を基にして（数因子 $\frac{1}{2}$ は別にして），適当に拡張すれば正しい散逸ラグランジアンが求まるだろうとおおよその見当がつく．

数因子 $\frac{1}{2}$ に関しては，変分原理とは直接結びつかない今までのオイラー・ラ

グランジュの式に非保存力（non-conservative force）の効果 $\varPhi(t)=\frac{1}{2}\zeta\dot{x}(t)^2$（散逸関数と通常呼ばれている）を付け加えた式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathscr{L}}{d\dot{x}(t)}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x(t)}=\frac{\partial\varPhi(t)}{\partial\dot{x}(t)} \tag{3.25}$$

が参考になるであろう．ただし，$\varPhi(t)$ そのままでは変分原理には役立たないが，筆者の輸送現象に対する変分原理の基本理念[18, 19]

“定常状態では，そこに到る途中の過程を考慮に入れた積分されたエントロピー生成が最小になる”

に基づいて散逸関数 $\varPhi(t)$ を時間で積分した，いわば“散逸エネルギー関数”

$$W_{\rm diss}^{(0)}(t)=-\int_0^t\varPhi(s)ds=-\frac{1}{2}\zeta\int_0^t\dot{x}(s)^2ds \tag{3.26}$$

が，散逸ダイナミクスの物理的変分原理を見出す出発点になることを次に示す．

(ii) くり込まれた散逸ラグランジアンの構成

ここの目的は，散逸ダイナミクス方程式 (3.16) を与える“物理的”散逸ラグランジアン

$$\mathscr{L}_{\rm diss}^{(\rm phys)}(t)=\mathscr{L}_{\rm dyn}(t)+W_{\rm diss}(t) \tag{3.27}$$

を構成することである．ただし，散逸項 $W_{\rm diss}(t)$ は熱の発生と直接係る表式 $W_{\rm heat}(t)=-2W_{\rm diss}^{(0)}(t)$ を主たる項として含む“物理的な”ものであってほしい．

そこで，$W_{\rm diss}(t)$ として

$$W_{\rm diss}(t)=W_{\rm diss}^{(0)}(t)+R_{\rm diss}(t);\quad R_{\rm diss}(t)=\int_0^t Q_{\rm diss}(s)ds \tag{3.28}$$

の形を仮定し，$Q_{\rm diss}(t)$ を探すことにする．

この系の作用は，$t_1=\tau$ とおいて，

$$\begin{aligned}S_{\rm diss}&=\int_0^\tau\mathscr{L}_{\rm diss}(t)dt=\int_0^\tau\mathscr{L}_{\rm dyn}(t)dt+\int_0^\tau W_{\rm diss}(t)dt\\&=\frac{m}{2}\int_0^\tau\dot{x}(t)^2dt-\int_0^\tau V(x(t))dt-\frac{\zeta}{2}\int_0^\tau dt\int_0^t\dot{x}(s)^2ds\\&\quad+\int_0^\tau dt\int_0^t Q_{\rm diss}(s)ds\end{aligned} \tag{3.29}$$

という2重積分を含む形になるので，これらの変分をとる際に，前述した通り数学的な工夫を要する．

幸いに，次の公式がこの問題を解くのに大いに役立つ：任意の関数 $f(t)$ に対して

$$\int_0^\tau dt\int_0^t f(s)ds=\int_0^\tau(\tau-t)f(t)dt \tag{3.30}$$

が成り立つ．この公式は，両辺を τ で微分してみれば，その両辺が一致し，$\tau=0$ に対しても両辺0になることから容易に確かめられる．より一般に次の公式が知られている：

$$\int_0^\tau dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\tau(\tau-t)^{n-1}f(t)dt. \tag{3.31}$$

これらの公式の利用に気づくことが“物理的”散逸ラグランジアンを見出すた

めのキーポイントの一つである．式 (3.29) の第 3 項の変分から，粘性項 $\zeta\dot{x}(t)$ が求まるように，$W_{\rm diss}(t)$ を決めたい．公式 (3.30) を用いると，式 (3.29) の最右辺の第 3 項は

$$-\frac{\zeta}{2}\int_0^\tau dt\int_0^t \dot{x}(s)^2 ds = -\frac{\zeta}{2}\int_0^\tau (\tau-t)\dot{x}(t)^2 dt \tag{3.32}$$

である．よってこの項の変分からのオイラー・ラグランジュ方程式 (3.14) への寄与は

$$\ddot{x}(t)f_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{x}(t)f_{\dot{x}t} \to -\zeta(\tau-t)\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) \tag{3.33}$$

となり，粘性項 $\zeta\dot{x}(t)$ が得られるが，同時に余分な項も現れる．このように質量が時間と共に変化するような効果を与える項は，くり込んで消えるようにうまく $R_{\rm diss}(t)$ を決めなければならないと思われる．しかし，そのような $R_{\rm diss}(t)$ は見つかりそうにない．例えば，次のような 3 重積分（散逸関数の多重積分）

$$\int_0^\tau R_{\rm diss}(t)dt \to \int_0^\tau dt\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}\frac{\zeta}{2}\dot{x}(t)^2 dt_2 \tag{3.34}$$

を考えると，公式 (3.31) を用いて，これは

$$\frac{1}{2!}\int_0^\tau (\tau-t)^2\left(\frac{\zeta}{2}\dot{x}(t)^2\right)dt \tag{3.35}$$

と変形できるので，オイラー・ラグランジュ方程式への寄与は

$$\frac{1}{2!}\left(\zeta(\tau-t)^2\ddot{x}(t) - \zeta(\tau-t)\dot{x}(t)\right) \tag{3.36}$$

となる．このように，どんなに高次の多重積分を付け加えても，低次が消えずに却って $(\tau-t)$ の高次が増えるばかりである．そこで，この情況を逆手にとり，無限に高次の多重積分を付け加えて（くり込んで），次の形のオイラー・ラグランジュ方程式

$$g(t)\left(m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) - F(x(t))\right) = 0 \tag{3.37}$$

を導くように $R_{\rm diss}(t)$ を決めることにする．もし，因子 $g(t)$ が零にならない関数となるようにとれれば，望みの運動方程式 (3.16) が得られることになる．高次のくり込みまで系統的に検討してみると，運良く上の戦略はうまく適用できることがわかった[2)]．その結果は次の通りである：

$$W_{\rm diss}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\zeta}{m}\right)^n\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\cdots\int_0^{t_{n-1}}\mathscr{L}_{\rm dyn}(t_n)dt_n, \tag{3.38}$$

および

$$g(t) = \exp\left(\frac{\zeta}{m}(t-\tau)\right). \tag{3.39}$$

これに対応する $\mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (math)}(t)$ は

$$\int_0^\tau \mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (math)}(t)dt = \int_0^\tau \mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (phys)}(t)dt \tag{3.40}$$

によって定義され，それは，公式 (3.31) を用いると，

$$\mathscr{L}_{\rm diss}^{\rm (math)}(t) = {\rm e}^{(t-\tau)\zeta/m}\mathscr{L}_{\rm dyn}(t) = {\rm e}^{(t-\tau)\zeta/m}\left(T(\dot{x}(t)) - V(x(t))\right) \tag{3.41}$$

で与えられることがわかる．明らかに，これは，式 (3.38) の $W_{\rm diss}(t)$ を用いた物理的ラグランジアン (3.27) とは全く異なる通常の関数である．大変興味深

いことに，これは式 (3.17) と因子 $\exp\left(-\frac{\zeta\tau}{m}\right)$ を除いて一致している．その結果，今までのラグランジアン (3.17) を用いた計算はこの因子の影響を除けば正しい結果を与えることになる．しかし，この因子の存在は非常に大きく，次回議論するように極めて本質的である．

3.5 おわりに

以上のように，時間反転対称性を破る散逸ダイナミクスに対しても物理的な散逸ラグランジアンが発見され，それを用いた変分原理が確立された．こうして，変分原理によって，不可逆過程まで含めて統一的に自然法則を表現することができるようになった．散逸ラグランジアンの中の粘性係数の 1 次の項 $W_{\mathrm{diss}}^{(0)}(t)$ は散逸関数 $\varPhi(t)$ の時間積分（に負符号つけたもの）であるから，ζ が小さいときには，散逸ラグランジアンは熱の発生量そのものを用いて与えられることになり，これは物理的である．高次のくり込みの効果も散逸関数の時間に関する多重積分で与えられるのは興味深い．散逸ラグランジアンのより直接的な導出法と経路積分量子化については次回に解説する．また，粘性係数 ζ が $\dot{x}(t)$ に依存する非線形の場合への拡張についても次回に説明する．

参考文献

1) 鈴木増雄，本連載，「数理科学」2014 年 6 月号（第 1 回）および 8 月号（第 2 回）（サイエンス社）．
2) M. Suzuki, *JPS Conf. Proc.* **1** (2014) 012128, and *Physica A* (in preparation).
3) 加藤光裕，「ニュートン力学と解析力学」，「数理科学」，2014 年 4 月号（サイエンス社）．
4) 大貫義郎，柏太郎，鈴木増雄，『経路積分の方法』（岩波書店，2000 年）．
5) R.P. ファインマン/A.R. ヒッブス著，北原和夫訳，『ファインマン経路積分と量子力学』（マグロウヒル出版，1990 年）．
6) 鈴木増雄，「物理学における変分原理――自然は無駄を嫌う」，「パリティ」2010 年 8 月号（丸善出版）．
7) 吉岡大二郎，『力学』（朝倉書店，2008 年）．
8) T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 第 2 版 (1976).
9) 鈴木増雄，「変分原理と物理学」，「パリティ」2012 年 9 月号〜11 月号（丸善出版）．
10) 大貫義郎，岩波講座『力学』第 1 章（岩波書店，1994 年）．
11) 佐野雅巳，「力学的エネルギー」，「数理科学」2013 年 8 月号（サイエンス社）．
12) P. Caldirola, *Il Nuovo Cimento B***77** (No.2) (1983) 241.
13) C.C. Gerry, *J. Math. Phys.* **25** (6) (1984) 1820. この論文では，変分原理よりも経路積分量子化に主眼がある．
14) H. Majima and A. Suzuki, *Ann. of Phys.* **326** (2011) 3000.
15) C-I. Um, K-H. Yeon and T.F. George, *Phys. Rep.* **362** (2002) 63.
16) C.R. Galley, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 174301. この論文では，Keldysh の 2 時間グリーン関数を用いて，しかも通常の変分原理の境界条件ではなく，初期条件のみを用いており，この理論が物理的な理論であるかどうかは検討の余地がある．この論文を教えてくれた桑原幸朗氏に感謝致します．
17) Y. Kuwahara, Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Phys. Lett.* **A377** (2013) 3102.
18) M. Suzuki, *Physica* **A392** (2013) 314.
19) M. Suzuki, *Physica* **A392** (2013) 4279.

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

特　集（2014 年 10 月号予告）

複素解析の視点

遍在する複素関数

特　集（2014 年 8 月号）

ベクトル解析の力

多彩な問題を通じてその姿に迫る

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．現代に至るまで長い間，多くの人に種々の問題を提起してきた“重力”ですが，特集で様々なテーマの記事があることを見ると，“重力”に対する謎と魅力は尽きないことがわかります．

確かに古くからあるテーマではありますが，そこから派生する話題や考え方もこれからまだまだ出てくるかと思います．また，新しい発見もあるはずです．今後の展開が楽しみです．

さて，何人かの先生方も触れられているように来年は一般相対論誕生から 100 年を迎えます．小誌でもこれに関連した特集を予定しておりますので，楽しみにお待ちいただければ幸いです．　(R)

＊　＊

ニュートンの林檎の話やアインシュタインが相対性理論を提唱したといったことは，物理学とあまりなじみのない方にも，よく知られているのではないかと思います．ですが，私たちの最も身近な力である重力について，今回の特集で取り上げたような多くの謎があるということは，世間一般の方々にはあまり知られていないのではないでしょうか．

アインシュタインが一般相対性理論を提唱してから，来年で 100 年が経ちます．重力に関する話題が，他の科学誌やテレビのニュース，新聞などでも多く取り上げられることを期待しています．私も今から お祭りの前のようなわくわくした気分です．　(T)

数　理　科　学　9月号

2014 年 9 月 1 日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁